Г. В. Суходольский

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ПСИХОЛОГОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



Ленинградский
ордена Ленина и ордена Трудового Красного
Знамени Государственный университет им. А. А. Жданова

Г. В. Суходольский

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ПСИХОЛОГОВ



Издательство Ленинградского университета 1972

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

В современных психологических исследованиях необходимо использовать точные статистические методы описания явлений и проверки гипотез. Однако учебная литература по основам теории вероятностей и математической статистики для студентов, специализирующихся по психологическим дисциплинам, в настоящее время отсутствует. Данная книга представляет собой попытку в определенной мере восполнить этот пробел. В ней систематизирован обширный арсенал статистических методов описания и проверки гипотез, применяемых при изучении психических явлений на качественном и количественном уровнях. Изложение существа методов и условий их использования иллюстрируется многочисленными конкретными примерами из общей, педагогической, медицинской, социальной и инженерной психологии.

Книга предназначена для студентов младших курсов психологических факультетов, отделений и специализаций. Она также может быть полезной для старшекурсников, аспирантов и научных сотрудников.

$\frac{1-5-7}{47-72}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ
БОРИСА ГЕРАСИМОВИЧА АНАНЬЕВА
ПОСВЯЩАЮ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая статистика — это наука о случайных явлениях. Под явлением понимается любой подлежащий изучению объект независимо от его конкретного содержания. По степени количественной определенности явления рассматриваются как отдельные события, величины, функции и как системы событий, величин, функций. Если изучаемые объекты можно трактовать как следствия многочисленных разнообразных по действию причин, то интересующие исследователя свойства этих объектов определяются неоднозначно и могут быть предсказаны лишь в результате массовых наблюдений не полностью, а с большей или меньшей вероятностью. Такие объекты и характеризуются как случайные явления (случайные события, величины, функции или их системы).

Математическая статистика занимается математическим описанием случайных явлений, т. е. построением вероятностных моделей, а также проверкой их пригодности. Поэтому выделяют два раздела: описательную статистику и статистику «проверяющую» (статистическую проверку гипотез); соответственно разделяется и методический аппарат. Понятия и методы описательной статистики создаются в теории вероятностей, а понятия и методы статистической проверки гипотез создаются в специальных теориях

(например, в теории статистических решений), либо в приложениях теории вероятностей к конкретным наукам.

Современное развитие обширного комплекса наук о человеке * предполагает широкое использование методов математической статистики уже потому, что именно в этих науках объекты исследования в наибольшей мере удовлетворяют понятию случайных явлений. Благодаря огромной структурной и функциональной сложности, психические, социальные, педагогические и т. п. явления издавна служили развитию самой математической статистики (здесь достаточно упомянуть Ф. Гальтона, развившего первоначальные идеи корреляции и регрессии, Ч. Спирмена, создавшего ранговую корреляцию и однофакторный анализ, Л. Терстона, разработавшего мультифакторный анализ). Однако к настоящему времени собственный понятийный и методический аппарат математической статистики значительно развился и усложнился, что естественно вызывает трудности его использования в «не математизированных» еще науках.

Примеры зарубежных руководств по предмету, собственный опыт автора и его коллег убедительно свидетельствуют о необходимости специальной интерпретации основных идей, понятий и методов математической статистики для специалистов психологических и смежных с ними дисциплин. В этой связи, очевидно, изложение основ математической статистики не может и не должно быть отягощено необходимыми для математика, но излишними для психолога математическими подробностями. Учитывая сказанное, автор ставил перед собой следующие задачи: 1) дать минимум языка (основные понятия и символы), необходимый и достаточный для подготовки экспериментального исследования, первичной и последующей специальной обработки полученных данных, для углубленного изучения специальной литературы; 2) ознакомить (в общем виде и на примерах из области психологии, педагогики, социологии и т. д.) с системой идей и вероятно-

* Б. Г. Ананьев. Человек как предмет познания. Изд. ЛГУ, 1968.

стных методов, которые целесообразно использовать в комплексе психологических дисциплин; 3) показать на конкретных примерах из разных областей психологии пути и способы применения тех методов теоретико-вероятностного описания и проверки статистических гипотез, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. В этой связи книга имеет ряд особенностей.

В изложении автор основывался на системном подходе, естественном для познания психических, социальных, педагогических и т. п. явлений, в котором существенное значение имеют уровни квантификации изучаемых объектов, а также последовательный переход от номенативной квантификации свойств (события) к их упорядочиванию и ранжированию, и затем к уравниванию интервалов и отношений (величины, функции). Изложение приближено к задачам психологической теории и практики и везде поясняется примерами, большинство из которых взято из конкретных исследований автора или его коллег. Для работы над книгой читателю достаточно математической подготовки в объеме средней школы. Изложение ведется без доказательств, а вся необходимая терминология и символика из высшей математики вводится по мере надобности. Необходимые сведения о матрицах и действиях с ними даны в Приложении 1 (к нему следует обратиться при первой же встрече с понятием матрицы). Существенное внимание уделено специальным понятиям и терминам из теории вероятности и других разделов математической статистики. Автор глубоко убежден, что робость перед математическими методами и трудности в их усвоении и использовании обусловлены «языковыми» трудностями. Поэтому, подчеркивая термины, рекомендуемые к употреблению, автор стремился приводить также синонимы, встречающиеся в специальной литературе. Библиография использованных математических источников приведена в конце книги, ссылки в тексте сделаны на работы нематематического характера. Автор старался представить широкий арсенал возможностей и методических средств математической статистики

в психологических и смежных дисциплинах, особое внимание обращая на методы, важные для этих наук, но мало освещенные в литературе, доступной широкому кругу исследователей. Тем не менее, отбор материала в книгу, видимо, не лишен определенного субъективизма.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность профессору Б. Ф. Ломову, который предложил ему разработать и читать на факультете психологии курс лекций по математической статистике, профессору Б. Г. Ананьеву, который способствовал развитию изысканий автора на этом пути и благодаря поддержке которого была создана эта книга, а также всем преподавателям и сотрудникам факультета психологии, помогавшим ему советами и материалами.

Глава 1

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

§ 1.1. СОБЫТИЕ И МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ПОЯВЛЕНИЯ

1.1.1. Определение события

Событием называют всякий реальный или воображаемый факт, который интересует исследователя. О событии говорят, что оно появляется, наступает, происходит, имеет место и т. п. Наблюдение или эксперимент, в котором могут появляться какие-либо события, называется *опытом*. Существующие объективно или специально вызываемые события, известные экспериментатору и влияющие на ход опыта, называются *условиями* (опыта). Так как условия могут быть очень многочисленными, то обычно из их числа выделяют небольшую группу *основных условий*, влияние которых на ход опыта наиболее существенно. В отдельных случаях в качестве основных принимаются условия, которые по каким-то соображениям наиболее желательны для целей исследования. События, которые объективно влияют на ход опыта, но о которых экспериментатору ничего не известно, в число условий опыта не включаются. События, которые при данных условиях могут произойти в опыте, называются *исходами* (опыта). Условия опыта вместе с совокупностью возможных исходов называются *испытанием*.

Пример 1.1.1. Опыт состоит в наблюдении за учеником, решающим задачи. Условиями опыта являются: возраст и уровень образования ученика, место и время наблюдения, характер задачи (по виду учебной дисциплины) и тип задачи (по виду решающего правила), время, отпущенное на решение и т. п. В зависимости от целей наблюдения за основные условия может быть принята любая часть или все перечисленные условия. Как правило, многие из событий, способных влиять на исходы опыта, не могут быть включены в круг условий. Например, наличие у ученика определенных побуждений неучебного характера, безусловно, влияет на то, как он решает задачу. Но, будучи скрытыми от наблюдателя, эти побуждения вне специального эксперимента не могут учитываться в качестве условий опыта.

При решении конкретной задачи учеником можно выделить два или три исхода. Два исхода: первый — ученик решает

задачу правильно, второй — ученик не решает задачу. Второй исход, в свою очередь, может быть подразделен на два новых исхода: ученик решает задачу неправильно, и ученик не доводит решение до конца и отказывается от дальнейших попыток, потому что не знает, что делать. Таким образом, в случае трех исходов выделяются: первый — ученик находит правильное решение и решает задачу до конца, второй — ученик неправильно решает задачу до конца и третий — ученик не решает задачу до конца. Попытки решить одну задачу при перечисленных условиях, приводящие к одному из указанных исходов, образуют одно испытание, попытки решить вторую задачу — второе испытание и т. д.

1.1.2. Случайные и неслучайные события

Случайным называется событие, которое при определенном комплексе условий опыта в каждом конкретном испытании может происходить, а может и не происходить. Так, в примере 1.1.1 ученик может решить предложенную задачу правильно, а может и не решить. Поэтому факт правильного решения задачи учеником можно рассматривать как случайное событие. Аналогично и противоположный факт — неправильное решение задачи — тоже случайное событие. *Достоверным* называется событие, которое всегда имеет место при определенном комплексе условий. Например, нормально развивающийся ребенок всегда начинает говорить на языке тех людей, с которыми общается в период освоения устной речи. *Невозможным* называется событие, которое никогда не происходит при определенном комплексе условий. Например, животное, лишенное человеческого мозга и артикуляторных органов, не может пользоваться человеческой речью. Достоверные и невозможные события объединяются понятием *неслучайных* событий.

Как мы указывали в предисловии, большинство фактов психической жизни человека и животных можно рассматривать как случайные события. Трудно назвать какое-либо психическое явление, которое бы наступало во всех случаях, когда имеются соответствующие условия. Всегда есть исключения: рождаются дети с одной рукой или с двумя головами; наряду с нормальными, появляются дебилы, имбицилы и идиоты, с одной стороны, талантливые и гениальные — с другой; как бы внимательно ни следил наблюдатель за интересующим его объектом, внимание может быть отвлечено каким-либо посторонним раздражителем. Примеры можно легко умножить, но здесь мы ограничимся сказанным.

Важно отметить, что под категорию случайных теоретически подпадают все события, которые хотя бы однажды не появляются тогда, когда они должны были появиться, несмотря на то, что прежде они появлялись всегда. Но практически такие события принимают за достоверные. Аналогичное утверждение можно сделать и в отношении невозможных событий. Поэтому нет,

в сущности, четких границ между достоверными и случайными событиями, а также между случайными и невозможными событиями. После того как мы рассмотрим понятие о вероятности, мы вернемся еще раз к разделению достоверных, случайных и невозможных событий.

1.1.3. Частота, частость и вероятность

Каждый знает по личному опыту, что одни случайные события происходят сравнительно часто, а другие — редко. Например, в Ленинграде часто идет дождь, а вот жара в 30° бывает редко. Гриппом мы болеем часто, а психическими заболеваниями —

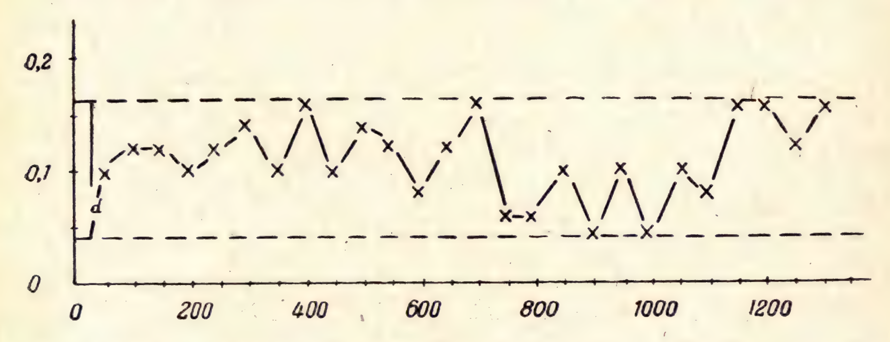


Рис. 1.1.1. Рассеивание значений частости цифры «7», вычисленных по группам из пятидесяти исходов.

По оси ординат — частости, по оси абсцисс — количество исходов; d характеризует величину рассеивания.

сравнительно редко. Слова «часто», «редко», наряду с другими отображают в языке ожидаемую степень возможности появления случайных событий в окружающей нас действительности. Но возникает вопрос об объективной мере возможности появления случайных событий. В качестве такой меры могут использоваться частота, частость и вероятность события.

Частотой события называется количество случаев появления события. Пусть в примере 1.1.1 ученик правильно решил 8 задач. Это и есть частота правильного решения задачи учеником. Легко видеть, что частота зависит от количества испытаний. Тот же ученик из пяти задач мог решить, например, четыре задачи, а из двадцати — шестнадцать. Ясно, что при большем количестве наблюдений одно и то же случайное событие будет встречаться «чаще». Частота может служить в качестве сравнительной оценки возможности появления случайных событий лишь при условии одинакового числа испытаний. Если же это условие не выполняется, то нужна другая мера. Такой мерой возможности появления случайных событий является частость.

Частость — это относительная частота, т. е. частота, деленная на количество испытаний. Обозначая частоту f, количество испытаний n, а частость p, можем записать:

$$p = \frac{f}{n}. \qquad (1.1.1)$$

Частость в гораздо меньшей степени зависит от количества испытаний, чем частота. Так, если ученик из пяти задач правильно решил 4, из десяти — 8, а из двадцати только шестнадцать, то частость во всех трех случаях будет одинакова: 4/5.

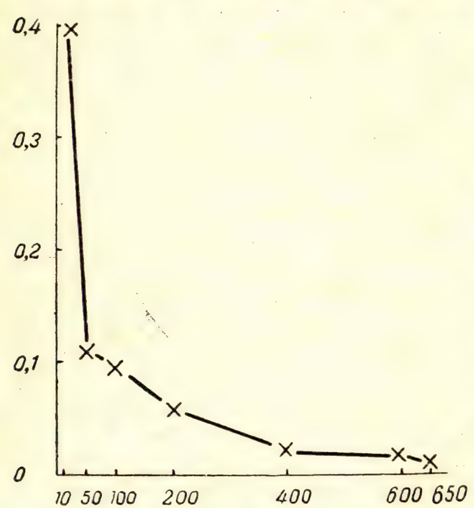


Рис. 1.1.2. Уменьшение величины рассеивания значений частости цифры «7» в зависимости от количества исходов, из числа которых высчитывалась частость.

По оси ординат — величина рассеивания (d), по оси абсцисс — количество исходов, послуживших основанием для расчета частостей.

Тем не менее и частость не является наилучшей мерой возможности появления случайного события. Покажем это на примере.

Пример 1.1.2. В ряде случаев важно знать, какова возможность спонтанного воспроизведения памятью человека хорошо известных ему образов. Например, как часто среди произвольно называемых или записываемых отдельных арабских цифр появляется определенная цифра? Был организован несложный эксперимент, в котором испытуемому предлагалось записывать на листе бумаги цифры от «0» до «9» — в любом порядке, кроме прямого и обратного, и таким путем заполнить цифрами стандартный лист писчей бумаги. Рассмотрим в данном примере частость записи цифры «7» одним из испытуемых.

Всего испытуемый записал более 1300 цифр, относительно которых частость записи цифры «7» составляет 0,108. Вычислим значения этой частости для каждых пятидесяти цифр, записанных испытуемым: для первых пятидесяти, для вторых пятидесяти, для третьих пятидесяти и т. д. Результаты приведены на рис. 1.1.1, откуда видно, что значения частости изменяются случайным образом в пределах от 0,04 до 0,16. Пределы изменения частости обозначены на рис. 1.1.1 буквой d и характеризуют *рассеивание* значений частости, определяемых по группам из пятидесяти испытаний. Поступая аналогичным образом, мы определили частости цифры «7» за каждые 10, за каждые 100, 200, 400, 600

и 650 цифр, записанных испытуемым, и нашли величину d. Результаты представлены на рис. 1.1.2. Можно видеть, что рассеивание значений частости цифры «7» не остается постоянным, а быстро уменьшается при увеличении количества исходов, на основе которого вычислялись частости. Таким образом, частость события тоже зависит от количества испытаний. Но чем больше испытаний проведено, тем больше мы можем быть уверены в том, что значение частости отображает объективную возможность появления интересующего нас события, а не обусловлено количеством испытаний. Полностью, однако, избавиться от влияния числа испытаний, пользуясь частостью, нельзя. Необходима другая мера. Такой мерой объективной возможности появления события является *вероятность*.

1.1.4. Статистическое определение вероятности

Существует немало определений того, что такое вероятность. Здесь мы рассмотрим одно из наиболее распространенных. Оно предложено Р. Мизесом и обычно называется «статистическим» определением вероятности. Как видно из примера 1.1.2, при увеличении количества испытаний значения частости изменяются все меньше и меньше, приближаясь к некоторому постоянному значению. Обозначив это значение P, можем записать:

$$P = \lim_{n \to \infty}{}^{*} \frac{f}{n}. \qquad (1.1.2)$$

Постоянное значение, к которому как к своему пределу стремится частость при неограниченном увеличении количества испытаний, и называют вероятностью.

На практике, очевидно, невозможно увеличивать количество испытаний до бесконечности. Поэтому непосредственно из опыта определить значение вероятности событий нельзя. В отдельных случаях, при определенных условиях, можно априори определить значение вероятности. Это так называемое классическое определение вероятности. Примерами такого определения являются вероятности выпадения «герба» или «решки» при бросании монеты *правильной формы*, равные $^1/_2$ каждая, или вероятности выпадения любой из сторон игральной кости (кубика), имеющей правильную форму, соответственно равные $^1/_6$ (по числу сторон). В большинстве практических приложений все же приходится пользоваться частостями как оценками для вероятностей, определяемыми в длинных сериях испытаний.**

Как следует из уравнений (1.1.1) и (1.1.2), и частость, и вероятность численно могут принимать любое значение между нулем и единицей. Действительно, если $f = n$, то $P = 1$, и событие,

---

* Знак «lim» читается как «предел» или «лимит».

** Вопрос о точности таких оценок рассматривается в главе 5.

о котором идет речь, является достоверным. Если же $f = 0$, то $P = 0$, и событие является невозможным. Теоретически частость и вероятность сколь угодно мало могут отличаться от нуля или единицы, но практически результаты округляются. Например, $P = 0{,}999$ округляется до $P = 1$, а $P = 0{,}001$ — до $P = 0$. Поэтому, как указывалось выше, «граница» между случайными и неслучайными событиями весьма условна. Очень частые случайные события на практике могут быть приняты за достоверные, а очень редкие — за невозможные события. Таким образом, вероятность как мера возможности появления события характеризует количественно и случайные, и неслучайные события. Согласно терминологии, рекомендованной к использованию в научной литературе Комитетом научно-технической терминологии, вероятность — это «положительное число, не превышающее единицу, представляющее собой количественную меру возможности появления случайного события в повторяющихся от опыта к опыту основных условиях. . . Она определяет среднюю частость, с которой можно ожидать появления случайного события в длинных сериях независимых испытаний». *

1.1.5. Геометрическое определение вероятности

Каждому числу может быть однозначно сопоставлен отрезок прямой линии, часть плоскости или некоторый объем. Это изображено на рис. 3. Отметим, что вместо квадратиков можно было бы взять любые другие фигуры, а вместо кубов — другие тела, лишь бы площади (или объемы) соотносились пропорционально числам. Пусть теперь имеется некоторая вероятность P, выражаемая через среднюю частость $\frac{f}{n}$:

$$P = \frac{f}{n},$$

где f и n — какие-то числа, например, $f = 1$, $n = 2$. Тогда, согласно рис. 1.1.3, сопоставляя этим числам какие-либо геометрические фигуры, мы можем выразить нашу вероятность как отношение двух площадей плоских фигур (S_1 и S_2), либо как отношение двух длин отрезков (L_1 и L_2), либо как отношение двух объемов некоторых тел (V_1 и V_2), т. е. как отношение, имеющее заданную величину 1/2. Если отношение имеет другую величину, то мы соответствующим образом выбираем длины, площади, объемы. Итак, геометрически вероятность представляет собой отношение длин, площадей и объемов (в общем случае — гиперобъемов).** Геометрическая интерпретация вероятности позволяет,

---

* Надежность технических систем и изданий. Основные понятия. Терминология, вып 67а. «Наука». М., 1965, стр. 22.

** Г. Г. Абергауз, А. П. Тронь, Ю. Н. Копенкин, И. А. Коровина. Справочник по вероятностным расчетам. М., 1966, стр. 26.

во-первых, наглядно изображать вероятностные соотношения между событиями (чем всегда пользуются), а во-вторых, облегчает решение некоторых практических задач.

Пример 1.1.3. Одной из важных задач человека-оператора является контроль за показаниями приборов, предполагающий опознание цифр и условных знаков на лицевых частях приборов. Пусть произошло отклонение одного из контролируемых параметров, что выразилось в изменении показаний соответствующего

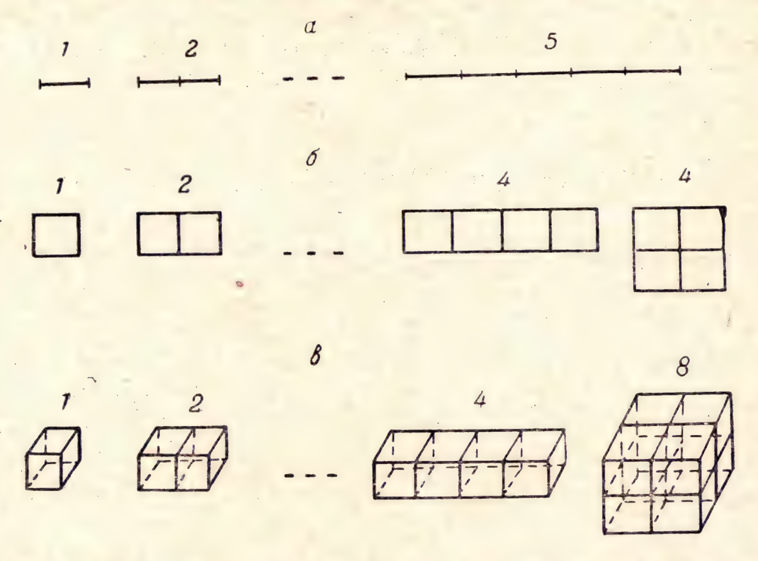


Рис. 1.1.3. Сопоставление числам геометрических фигур: отрезков (*а*), плоскостей (*б*), объемов (*в*).

прибора, расположенного на приборной панели перед оператором. Допустим, что человек в 100% случаев правильно опознает изменение показаний прибора, если он смотрит на этот прибор. Тогда возникает вопрос, какова вероятность события А, состоящего в том, что человек-оператор посмотрит на прибор, расположенный среди других на приборной панели?

Эту вероятность можно определить геометрически как отношение площади, занимаемой прибором, к общей площади панели. Однако приборы разных типов имеют разную площадь лицевой части. Кроме того, известно, что человек правильно опознает объекты, попадающие в определенную область поля зрения, площадь которой больше площади лицевой части обычного стрелочного прибора. Поэтому определим искомую вероятность как отношение площади области поля зрения, соответствующей 100%-ному опознанию, к площади приборной панели.

Экспериментально установлено, что область поля зрения человека, соответствующая 100%-ному опознанию объектов,

находящихся в этой области, простирается в любом направлении от центра фиксации глаз на 10 град *, т. е. эту область можно по форме считать плоским кругом с площадью $S_1 = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$ и $R = 10$ град. Следовательно, $S_1 = 314$ (град.). Далее экспериментально показано, что существуют оптимальные (с точки зрения контроля) размеры приборной панели. Они представлены в угловых величинах на рис. 1.1.4.** Обозначим площадь панели S_2, тогда по рис. 4 эта площадь составляет: $S_2 = 2 \cdot 68 \cdot (78 + 45) = 16728$ (град.). *** Полагая, что зрение оператора одинаково часто фиксирует любую часть площади приборной панели, вычислим интересующую нас вероятность события А (состоящего в том, что человек-оператор посмотрит на прибор, расположенный на панели) как отношение площади области 100%-ного опознания к площади приборной панели:

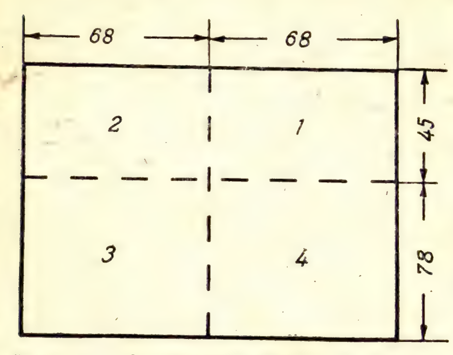


Рис. 1.1.4. Оптимальные угловые размеры приборной панели (по Пахомову и Измаильцеву) в градусах. Арабскими цифрами обозначены квадранты.

$$P(\text{А}) = \frac{S_1}{S_2} = \frac{314}{16\,728} \approx 0{,}019.$$

§ 1.2. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

1.2.1. Понятие о системе событий

Системой событий будем называть совокупность событий, рассматриваемых вместе. События в системе приобретают свойства, которых они, если их рассматривать по отдельности, не имеют. Так, события в системе могут происходить совместно или не совместно. Они могут зависеть друг от друга. Одно событие может

* Ю. Б. Гипенрейтер. Опыт экспериментального исследования работы зрительной системы наблюдателя. В сб. Инженерная психология. Изд. МГУ, 1964, стр. 223.

** А. Ф. Пахомов, А. М. Измаильцев. Экспериментальные исследования по рациональному размещению индикаторных устройств в поле зрения оператора. В сб.: Проблемы общей и индустриальной психологии. Изд. ЛГУ, 1963. Перевод линейных размеров, приведенных этими авторами, в угловые осуществлялся нами по формуле: $\alpha = \frac{a}{0{,}00033 \cdot d \cdot 60}$, где a — линейные размеры сторон панели, *мм*; d — дистанция наблюдения, *мм*; α — угловые размеры, *град*. Результаты нами округлены (с недостатком) до целых.

*** Размеры площадей S_1 и S_2 при определенной дистанции наблюдения можно вычислить по формуле: $S_i^1 = S_i \cdot 0{,}00039 d^2$, где d — дистанция наблюдения; при этом наименование (град.)^2 опускается.

быть представлено в виде определенной группы других событий. События в системе могут быть по-разному упорядочены в некотором пространстве. Все эти свойства имеют важное значение для практики.

1.2.2. Совместное появление событий

Все события в некоторой системе событий можно разделить на две группы, в зависимости от того, могут они или не могут появляться *вместе* в одном испытании. Одну группу составляют события, которые никогда не могут появиться вместе в одном и том же испытании. Если появляется одно из них, то все другие уже исключены. Такие события называются *несовместными* (несовместимыми). Другую группу образуют события, которые могут появиться вместе в одном и том же испытании, но могут и не появиться вместе. Такие события будем называть *совместными* (совместимыми).

Пример 1.2.1. Опыт состоит в проверке восприятия испытуемым знаков, предъявляемых тахистоскопически. Условия опыта подразделяются на три группы: условия, характеризующие испытуемого; условия, характеризующие аппаратуру и процедуру опыта; условия, характеризующие предъявляемые знаки. Например, условия, характеризующие знаки, — это количество знаков в алфавите, угловые размеры, вид и степень контраста контура знака с фоном, наличие характерных деталей, степень соответствия абриса знака изображаемому объекту и т. д.

В качестве основных условий в конкретном исследовании выбираются любые комбинации возможных условий. Испытанием является предъявление одного знака и возможные ответы испытуемого, которые образуют исходы опыта. В данном примере можно выделить следующие исходы: первый — испытуемый правильно называет (или записывает) предъявляемый знак; второй — испытуемый неправильно называет его; третий — испытуемый по каким-либо причинам не дает ответа. При необходимости можно детализировать второй и третий исходы. В частности, испытуемый может: а) неправильно принять предъявляемый знак за другой знак из того же алфавита, например, предъявляется цифра «7», а испытуемый называет цифру «1»; б) неправильно принять предъявляемый знак за другой знак из иного алфавита, например, предъявлялась цифра «5», а испытуемый в ответ назвал букву «Б». Возможна и дальнейшая детализация каждого из новых исходов второго исхода.

Неправильно называемые знаки обычно имеют сходство с предъявляемыми. Если можно точно условиться о том, в чем это сходство состоит, то все неправильно называемые знаки можно разделить на группы по степени сходства с предъявляемым знаком, например, на две — сходных и несходных. Таким образом, второй исход детализируется по крайней мере на четыре новых исхода.

Перечисленные исходы изображены на рис. 1.2.1 в виде дерева (или графа) событий. При таком изображении основание ствола означает исходное состояние, т. е. предъявление знака. События и соединяющие их стрелки образуют «ветви». Исходом являются все события, составляющие отдельную «ветвь», считая от вершины ветви до основания ствола. Как видно по рис. 1.2.1, в примере нами выделено шесть исходов.



Рис. 1.2.1. Дерево событий, рассмотренных в примере 1.2.1. Арабские цифры обозначают события, римскими цифрами обозначены исходы опыта.

Все исходы опыта в примере 1.2.1 — это события несовместные. Действительно, если знак назван правильно (исход 1), то остальные исходы невозможны уже в данном испытании. А вот события, указанные на рис. 1.2.1 под номерами 2, 4, 6 — это совместные события. Потому что, если назван знак из другого алфавита, то он назван неправильно. При этом ничто не мешает неправильно названному знаку иметь большое сходство с предъявлявшимся. Мало того, именно большое сходство со знаком из другого алфавита может явиться одной из причин неправильного называния предъявлявшегося знака. Точно также совместны по три события 2, 4, 7; события 2, 5, 8 и 2, 5, 9.

Система несовместных событий, представляющих собой исходы опыта, называется *полной группой событий.* Поскольку количество исходов, выделяемых в опыте, зависит от обстоятельств, понятие полной группы событий условно. В общем случае число исходов может быть бесконечно велико, как мы покажем в следующей главе. Только в немногих частных случаях имеется небольшое количество заранее известных исходов, образующих полную группу событий. Например, при бросании монеты — два, при бросании игральной кости — шесть, при назывании первой пришедшей на ум арабской цифры — десять, а при назывании русской буквы — тридцать три. Несмотря на условность понятие полной группы событий очень важно для правильного вычисления вероятностей. Поэтому рекомендуется по возможности заранее перечислить все несовместные события, образующие полную группу.

1.2.3. Зависимость между событиями

Появление одних событий в системе может оказывать влияние на возможность появления других событий в той же или в другой системе. События называются *зависимыми*, если появление одного из них влияет на возможность появления другого. Если появление одного события не влияет на возможность появления другого события, то эти события называются *независимыми.* Зависимость между событиями в системах может быть обоюдная или односторонняя, парная или множественная. Чаще всего в теории вероятностей рассматривается обоюдная зависимость между событиями, при этом считается, что если событие А зависит от события В, то и событие В зависит от А. В этом смысле, например, несовместные события — всегда зависимые события, так как, по определению, появление одного из них делает невозможным появление всех других. Но существует и односторонняя зависимость, например, между «видовыми» и «родовыми» событиями: если идет дождь (событие В), то на небе обязательно есть облака (событие А) — событие В зависит от события А; но не наоборот, так как, если на небе облака, то дождь может и не идти. Облака и дождь — события совместные и зависимые. Но совместные события могут быть как зависимыми, так и независимыми. Например, движения двух автомашин по улицам города — чаще всего события независимые, но машины могут столкнуться на перекрестке, а одновременное появление двух машин в одном месте перекрестка — события совместные.

Зависимость между совместными событиями может быть не непосредственной, а опосредствованной некоторым явлением, выступающим в качестве их общей причины. Анализ таких причин, как и вообще содержательный анализ явлений, находится вне компетенции статистики. Статистика формализует причинно-следственные отношения между природными явлениями, лишь кон-

статируя факты влияния одних событий на возможность появления других, а содержательная интерпретация этих фактов — задача специальных научных дисциплин.

1.2.4. **Простые и сложные события. Представление сложного события в виде комбинации простых событий**

В примерах 1.1.1 и 1.2.1 мы видели, что одно событие может быть детализировано на два и более событий. События, которые могут быть представлены в виде комбинации других событий, называются *сложными* событиями. Те события, из комбинации которых образовано сложное событие, называются *простыми* (элементарными) событиями. Сразу же отметим, что это общепринятое разделение весьма условно. Чаще всего «простое» событие можно детализировать на более «простые». Эти, в свою очередь, на еще более «простые» и т. д. Где остановиться в этом «дроблении» событий, зависит от цели исследования, от желаемой полноты описания изучаемых явлений, от количества испытаний, в которых можно наблюдать выделенные события, и от многих других обстоятельств.

В большинстве практических приложений сложные объекты всегда нужно стремиться представить через простые события, связанные определенными соотношениями. Сложные явления, с которыми имеет дело психолог, не всегда легко представить в виде системы событий. Для этого необходимы определенные навыки, которые можно приобрести только на практике. А на первых порах требуются пробы и возможны ошибки. Все же приобрести эти навыки необходимо, чтобы правильно определять исходы опыта, выбирая желаемую меру подробности описания изучаемых фактов и по возможности уменьшить объем последующих вычислений, а часто и объем экспериментов.

Существуют установленные правила сочетания простых событий в сложные и наоборот, а также правила преобразования одних событий в другие. Этими правилами пользуются во многих научных дисциплинах, в том числе — в теории вероятностей и в математической статистике. Некоторые основные правила сочетания простых событий в сложные события вместе с принятыми словесными, наглядными и аналитическими формулировками представлены в табл. 1.2.1. * *Отрицанием* события А называется несовместное с ним событие $\bar{A}$, образующее вместе с событием А полную группу. Событие А и его отрицание $\bar{A}$ называются *противоположными* событиями. Обычно отрицанием события А называют тот факт, что событие А в опыте не появляется. При этом отрицанию

---

* В книгах по математической и прикладной статистике наряду с терминами, обычно применяемыми в теории вероятностей, часто используется специальная терминология теории множеств и математической логики. Поэтому мы сочли полезным ее привести.

Основные правила сочетания простых событий в сложные

Таблица 1.2.1

№ пп	Термины, применяемые в теории вероятностей	Словесная формулировка	Графическая интерпретация (диаграммы Венна)	Специальные формулировки: в теории множеств	Специальные формулировки: в логике	Эквивалентная запись
1	Отрицание события $\bar{A}$	„Не А"	А „Не А"	„Дополнение А" ($\bar{A}$)	Функция отрицания ($\bar{A}$)	$\neg A$
2	Произведение событий AB	„и А, и В"	А АВ В	„Пересечение" $A \cap B$	Конъюнкция (логическое умножение) $A \wedge B$; $A \& B$	—
3	Включение событий $B \to A$	„Из В следует А", „Если В, то А", „В включено в А", „В влечет за собой А"	А В	„В есть подмножество множества А" $B \subset A$	Импликация $B \to A$	—
4	Тождество событий $A \equiv B$	„А тождественно В", А равносильно В и В равносильно А", А эквивалентно В"	А В	Эквивалентность $A \rightleftarrows B$	Эквивалентность $A \sim B$	$A \equiv BA \equiv B+A$
5	Сумма (несовместных) событий A+B	„Или А, или В"	А В	—	—	—
6	Сумма (совместных) событий A+B	„Или А, или В, но не оба вместе" (исключающее ИЛИ)	А В	Функция разноименности $A \oplus B$	„Исключающее ИЛИ" $A \approx B$	$A+B \equiv A\bar{B}+\bar{A}B$
7	То же	„Или А, или В, или оба вместе" (включающее ИЛИ)	А В	„Объединение" $A \cup B$	„Диззюнкция" (с конъюнкцией) $A \vee B$	$A+B \equiv A\bar{B}+\bar{A}B+AB$
8	Разность событий A−B	„А, но не В" (В запрещает А")	А В	$A \setminus B$	„Запрет" $A \leftarrow B$	$A-B \equiv A\bar{B}$

может быть подвергнуто как простое, так и сложное событие. *Произведением* событий называется сложное событие, которое состоит из совместных событий, появляющихся вместе. Под номером 2 в табл. 1.2.1 записано произведение двух событий. Аналогично обозначается произведение трех событий (АВС — «и А, и В, и С»), четырех событий (АВСД — «и А, и В, и С, и Д») и т. д. Так, в примере 1.2.1 исходы II—V (см. рис. 1.2.1) представляют собой произведения из трех событий каждый.

Включение событий характеризует отношение «видового» события к «родовому». Например, если испытуемый правильно назвал предъявленный ему знак, то из этого однозначно * следует, что он его воспринял. Но не наоборот. *Тождество* событий характеризует одинаковость объема понятий, изображаемых в виде событий. Если при осуществлении комплекса основных условий, при котором происходит событие А, наступает и событие В, то «А

---

* Теоретически рассуждая, следует думать, что испытуемый может чисто случайно правильно угадать предъявленный знак, ничего не воспринимая. Но опыт показывает, что вероятность такого угадывания пренебрежимо мала.

влечет за собой В». Если при этом имеет место и обратное, т. е. «В в то же время влечет за собой А», то события А и В называют *равносильными* и заменяют одно другим, следовательно, считают тождественными (эквивалентными).

Тождество событий, так же, как и остальные события, указанные в табл. 1.2.1, позже мы поясним примером. *Суммой* (несовместных) событий называется сложное событие, которое состоит в появлении только одного из несовместных событий. *Суммой* (совместных) событий называется сложное событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из возможных совместных событий, при этом в случае несовместного появления таких событий сумма не включает произведения слагаемых. В случае совместного появления событий в сумму включается их произведение (табл. 1.2.1). *Разностью событий* называется сложное событие, которое состоит в появлении одного из совместных событий и непоявлении другого.

Сложные события можно по-разному выразить через простые события, пользуясь отрицаниями, произведениями и суммами.

Помимо указанных, преобразований используются и другие, в частности, основанные на следующих тождествах:

$$\overline{\overline{A}} \equiv A \tag{1.2.1}$$

— двойное отрицание события тождественно ему самому

$$\overline{A + B} \equiv \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{1.2.2}$$

— отрицание суммы событий тождественно произведению отрицаний слагаемых. Это тождество обобщается на любое число событий. Чтобы избежать ошибок, запомним, что отрицание суммы не тождественно сумме отрицаний слагаемых: $\overline{A + B} \not\equiv \overline{A} + \overline{B}$. На основе тождеств (1.2.1) и (1.2.2) запишем тождество, противоположное тождеству (1.2.2):

$$A + B \equiv \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} \tag{1.2.3}$$

— сумма событий тождественна отрицанию произведения из отрицаний слагаемых

$$\overline{AB} \equiv \overline{A} + \overline{B} \tag{1.2.4}$$

— отрицание произведения тождественно сумме отрицаний сомножителей, но:

$$\overline{AB} \not\equiv \overline{A}\overline{B}$$

Отрицание тождества (1.2.4) приводит к следующему тождеству:

$$AB \equiv \overline{\overline{A} + \overline{B}}. \tag{1.2.5}$$

Тождества (1.2.3) — (1.2.5) обобщаются на любое число простых событий.

Все приведенные тождества легко можно доказать графически, пользуясь диаграммами Венна, приведенными в табл. 1.2.1. Эту возможность мы предоставляем читателю.

Пример 1.2.2. Опыт заключается в изучении принадлежности индивида к микрогруппе. Рассматриваются три микрогруппы. Пусть принадлежность индивида к одной из микрогрупп — простое событие. Соответственно принадлежность к первой из микрогрупп обозначим как событие A, принадлежность ко второй из микрогрупп — как событие B, принадлежность к третьей — как событие C. Тогда возможны следующие сложные события.

Событие 1. Индивид принадлежит *только к первой* микрогруппе и не принадлежит ко второй и третьей. Событие записывается в виде разности или произведения простых событий:

$$A - B - C \equiv A\bar{B}\bar{C}.$$

Используя тождество (1.2.2), можно представить событие 1 в другом виде. Для этого выполним преобразование:

$$A\bar{B}\bar{C} \equiv A(\bar{B}\bar{C}) \equiv A(\overline{B+C}).$$

Читается событие 1 в этом случае так: «Индивид принадлежит к первой микрогруппе и не принадлежит ко второй или третьей». На основании тождества (1.2.2) мы заменили произведение отрицаний событий B и C отрицанием их суммы.

События 2 и 3 аналогичны событию 1, но относятся ко второй и к третьей микрогруппам соответственно. Написать формулы этих сложных событий и преобразовать их предоставляется читателю.

Событие 4. Индивид принадлежит *только к одной* (любой, но одной!) микрогруппе. Это сложное событие записывается в виде суммы произведений несовместных событий:

$$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

Применяя к этому выражению почленно тождество (1.2.2), можем преобразовать его так:

$$A(\overline{B+C}) + B(\overline{A+C}) + C(\overline{A+B}).$$

Событие 5. Индивид принадлежит к двум (любым) микрогруппам из трех. Событие записывается в виде следующей суммы произведений:

$$AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC.$$

Здесь каждое из слагаемых обозначает принадлежность индивида к соответствующим двум микрогруппам, значит, событие 5 состоит из трех других сложных событий.

Событие 6. Индивид принадлежит ко всем трем микрогруппам; это событие записывается как ABC, либо на основе тождества (1.2.5):

$$\overline{\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}}.$$

Событие 7. Индивид не принадлежит *ни к одной* из трех микрогрупп. Это событие записывается как произведение отрицаний простых событий: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, или на основе тождества (1.2.2):

$$\overline{A+B+C}.$$

Заметим, что событие 7 не является противоположным событию 6. Отрицанием события 6 является следующее событие.

Событие 8. Индивид *не принадлежит ко всем трем* микрогруппам. Это событие записывается как $\overline{ABC}$, либо на основе тождества (1.2.4), как

$$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}.$$

Возможны и более сложные события. Отметим в дополнение к сказанному, что количество сложных событий, которые могут рассматриваться как исходы опыта, быстро растет по мере увеличения числа простых событий, так как допустимы любые их комбинации.

Рассмотрим в нашем примере еще четыре сложных события.

Событие 9. Индивид не принадлежит ни к одной из микрогрупп или принадлежит к одной из них, или принадлежит к двум, или ко всем трем. Это событие представляет из себя сумму событий 7, 4, 5, 6:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)+(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)+ABC$$

Событие 10. Индивид не принадлежит ни к одной из микрогрупп или принадлежит к одной, или к двум микрогруппам, но не принадлежит ко всем трем. Это событие представляет из себя сумму событий 7, 4, 5 и 8:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)+(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)+\overline{ABC}.$$

Событие 11. Индивид принадлежит обязательно хотя бы к одной из трех групп. Это событие эквивалентно событию 9, у которого отрицается событие 7:

$$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}+(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)+(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)+ABC.$$

Событие 12. Индивид принадлежит только к двум из трех микрогрупп. Это событие эквивалентно событию 5, а также событию 9, в котором все слагаемые, кроме события 5, заменены противоположными событиями:

$$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}+\overline{(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)}+(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)+\overline{ABC}.$$

Заканчивая пример, особо отметим, что на практике могут использоваться любые преобразования сложных событий. Это позволяет, смотря по обстоятельствам, облегчить сбор статистических данных и упростить вычисления вероятностей сложных событий.

1.2.5 Уровни количественного определения событий *

Под количественным определением (*квантификацией*) события будем понимать его замену числами. Целью такой замены является возможность оперировать числами вместо того, чтобы действовать с реальными вещами. Но операции с числами должны адекватно отображать действия с вещами и обосновываться известными нам свойствами самих вещей, иначе получатся фиктивные результаты.

Упрощенно подходя к задаче количественного определения некоторого реального явления, выделяют два традиционных уровня: уровень «словесного» качественного описания (события), уровень измерения (величины и функции). Но величины и функции тоже могут быть представлены как события. Поэтому здесь мы дадим несколько иную интерпретацию уровней количественного определения применительно к событиям.

Первый уровень количественного определения события — это его словесное описание, в котором указаны общие и специфические свойства, характеризующие данное событие, но ничего не говорится (потому что обычно ничего не известно) о степени выраженности этих свойств. События, определенные на таком уровне, будем называть *классифицированными* событиями. Типичный пример классифицированных событий — классический перечень темпераментов: сангвинический, холерический, флегматический и меланхолический. Или перечень свойств нервной системы. Или алфавитный перечень букв и цифр, и т. д. Большинство психических явлений находится сейчас в психологии на этом уровне определения. Может показаться странным, что мы называем этот уровень уровнем количественного определения. Но это вполне правомерно. Мы можем перенумеровать классифицированные события числами и затем пользоваться этими числами как «именами» событий, что короче, чем длинные словесные описания. Правда, никаких привычных (в смысле обычной алгебры) операций с этими числами производить нельзя. Мы, далее, можем охарактеризовать классифицированные события вероятностными мерами и упорядочить их в соответствии с вероятностями появления. Мы можем, наконец, определять степень зависимости между классифицированными событиями.

---

* Вопрос о количественном определении событий — специальный вопрос, выходящий за пределы нашей темы. Однако возможность применения конкретных статистических мер и методов зависит от уровня количественного определения изучаемых объектов. Поэтому мы коснемся этого вопроса.

Следующий, более высокий уровень количественного определения, — это словесное описание события, в котором, кроме выделения общих и особых свойств, характеризующих событие, указана *степень* проявления этих свойств, но не указана (обычно не известна) мера проявления. Так, например, сравнивая визуально длины двух отрезков, мы можем указать, равны ли они, или одна *больше* или *меньше* другой. Но без привлечения общепринятых известных нам мер длины (метров, сантиметров и т. п.), мы не можем сказать, *насколько больше*, или *насколько меньше*. Несколько отрезков мы можем *упорядочить по возрастанию* длины: «больше», «еще больше», «гораздо больше» и т. д.; или *по убыванию* длины: «меньше», «еще меньше», «гораздо меньше». Степень выраженности других свойств без указания меры передается словами: «лучше — хуже», «дальше — ближе» и тому подобными прилагательными в сравнительной степени. События, количественно определенные на данном уровне, будем называть *упорядоченными* событиями. Поскольку упорядочение касается одного свойства, система упорядоченных событий образует *ряд* событий. В этом ряду события могут быть перенумерованы числами, величины которых должны отображать отношения «больше — меньше», т. е. ряду событий, упорядоченных по возрастанию, должны сопоставляться числа, также упорядоченные по возрастанию, или наоборот. Эти числа можно суммировать и умножать, но, строго говоря, нельзя вычитать и делить. *

Последний из выделяемых нами уровней количественного определения событий — уровень *измерения.* ** На этом уровне к словесному описанию предыдущего уровня добавляется указание, насколько больше или насколько меньше выражено конкретное свойство событий. Это указание может быть дано лишь посредством некоторой меры, что предполагает установление единицы измерения данного свойства. События, количественно определенные на данном уровне, будем называть *измеренными* событиями. Этим событиям сопоставляются числа, определяемые в метрических системах измерения, т. е. системе событий сопоставляется система чисел, полученных в результате измерения. Такая система

* Дело в том, что операции вычитания и деления лежат в основе определения *метрических* мер, а, согласно определению, на уровне упорядоченных событий меры не используются.

** Термин «измерение» употребляется в широком и в узком смысле. В широком смысле под измерением понимается приписывание чисел вещам в соответствии с установленными правилами (С. С. Стивенс. Математика, измерения и психофизика. В кн. «Экспериментальная психология, т. 1, «Мир», М., 1963). В таком смысле классифицирование и упорядочивание событий — разновидности измерения. В узком смысле измерение понимается в метрологии. Здесь под измерением понимают отношение измеряемой величины к величине того же рода, принятой за единицу измерения. Результатом измерения является число, показывающее, во сколько раз измеряемая величина больше (меньше) единицы измерения (С. Ф. Маликов и Н. И. Тюрин. Введение в метрологию. Стандартгиз, М., 1965). Мы пользуемся здесь и ниже понятием измерения в узком смысле.

чисел обычно называется *величиной*. Рассуждая в обратном порядке, получаем возможность рассматривать величину как систему событий, каждое из которых — это число. Для измеренных событий все операции с числами эквивалентны действиям с самими вещами, которые отображены в событиях.

Все рассмотренное в предыдущих пунктах нашего изложения одинаково применимо к событиям, количественно определенным на любом из указанных уровней. Дальнейшее изложение поведем с учетом различий в этих уровнях.

§ 1.3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ КЛАССИФИЦИРОВАННЫХ СОБЫТИЙ

Как указывалось, для классифицированных событий можно определить меру возможности их появления, можно их сравнивать и упорядочивать, согласно этой мере, и на ее основе определять наличие, степень и направление зависимости между событиями, а также динамику событий.

1.3.1. Вероятности сложных событий

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \,. \qquad (1.3.1)$$

Используя знак суммирования и обозначая порядковый номер события $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, можем переписать (1.3.1) так:

$$P\Big(\sum_i A_i\Big) = \sum_i P(A_i). \qquad (1.3.2)$$

Вероятность полной группы событий равна единице. Так как полная группа событий представляет собой сумму несовместных событий, то на основании (1.3.2) для всех событий A_i (где $i = 1, 2, 3, \ldots, k$), образующих полную группу, можно записать:

$$\sum_{i=1}^{k} P(A_i). \qquad (1.3.3)$$

Следует хорошо запомнить это очень важное в теории вероятностей и статистике положение. Противоположные события образуют полную группу. Поэтому вероятность суммы противоположных событий, согласно (1.3.3), равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, откуда:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \text{ и } P(\overline{A}) = 1 - P(A), \qquad (1.3.4)$$

т. е. вероятность события может быть выражена через вероятность противоположного события на основе (1.3.4).

Вероятность зависимого события изменяется, если произошло другое из зависимых событий. Если события независимы, то

появление одного из них не изменяет вероятности другого. Пусть имеются зависимые события $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Вероятность зависимого события A_2 при условии, что произошло другое из зависимых событий A_1, называется *условной вероятностью* и обозначается $P(A_2/A_1)$. Условная вероятность события A_3 при условии, что произошли события A_1 и A_2, обозначается $P(A_3/A_1A_2)$. Аналогично обозначаются любые другие условные вероятности: $P(A_5/A_1A_2A_3 \ldots A_n)$, $P(A_i/A_jA_к \ldots A_{n-1})$ и т. д.

Вероятности независимых событий в отличие от условных вероятностей могут быть названы *безусловными*. Их мы и расссматривали до сих пор, обозначая $P(A_1)$, $P(A_2)$, . . ., $P(A_n)$.

Используя понятия условных и безусловных вероятностей, можно сформулировать условия *статистической* зависимости и независимости событий. *Условия зависимости* событий А и В выражаются в том, что условные вероятности этих событий не равны их безусловным вероятностям:

$$P(A/B) \neq P(A) \text{ и } P(B/A) \neq P(B). \qquad (1.3.5)$$

Условия независимости событий А и В состоят в том, что условные вероятности этих событий равны их безусловным вероятностям:

$$P(A/B) = P(A) \text{ и } P(B/A) = P(B). \qquad (1.3.6)$$

Если количество событий в системе больше двух и для каждой пары событий выполняются условия (1.3.5) или (1.3.6), то говорят о *попарно зависимых* (или *независимых*) событиях. Следует хорошенько запомнить условия (1.3.5) и (1.3.6), так как они лежат в основе проверки статистических гипотез о наличии или отсутствии связей между изучаемыми явлениями.

Если количество событий в системе несовместных событий меняется (увеличивается или уменьшается), то изменяются и вероятности этих событий. Но эти изменения вероятностей обусловлены только изменением количества событий в системе. В этой связи рассмотрим на примере понятие о *зависимых и независимых испытаниях*.

Пример 1.3.1. У кабинета дежурного психотерапевта ожидают приема трое больных. Врачу известно по медицинским карточкам, что один из ожидающих, по фамилии Петров, болел в прошлом маниакально-депрессивным психозом. Врач интересуется этим больным, но не хочет вне очереди вызывать его в кабинет. Обозначим как событие А тот факт, что в кабинет врача входит больной Петров; как событие В обозначим то, что входит другой больной — Сидоров (B_1) или Иванов (B_2). События А, B_1 и B_2 — несовместные и образуют полную группу (предполагается, что к врачу больные входят по одному). Так как появиться, согласно очереди, может равновероятно любой из больных, а сумма вероятностей для полной группы равна 1, то до начала приема вероятность появиться первым в кабинете врача для одного из больных, в том

числе для Петрова, равна $^1/_3$. Но вот первым входит Сидоров, т. е. произошло событие B_1. В результате вероятности событий A и B_2 изменились. Снова события A и B_2 (теперь уже только два события) образуют полную группу. Опять появление в кабинете врача любого из оставшихся больных равновероятно. Поэтому на основании (1.3.4) вероятности событий A и B_2 теперь уже равны $^1/_2$. Пусть вторым в кабинет врача вошел больной Иванов — произошло событие B_2. В результате вероятность события A стала равна единице; событие A становится достоверным: третьим войдет только Петров (при условии, что он не уйдет, не дождавшись своей очереди). Таким образом, уменьшение количества ожидающих приема больных приводит к увеличению условной вероятности появления больного, интересующего врача.

Пусть теперь ситуация изменится следующим образом. После того, как в кабинет врача вошел больной Сидоров, в приемную пришел четвертый больной, еще раньше занявший очередь и ненадолго уходивший. Таким образом, снова может войти один из трех больных и вероятность появиться Петрову не изменилась ($^1/_3$). При независимых испытаниях определение вероятностей исходов значительно проще, чем при зависимых испытаниях. Поскольку экспериментатор обычно может организовать опыты по схеме независимых испытаний, к этому всегда следует стремиться.

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \qquad (1.3.7)$$

Для трех зависимых событий к (1.3.7) добавляется еще один сомножитель — условная вероятность простого события, вычисленная при условии, что первое и второе события произошли:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = P(B) \cdot P(A/B) \cdot P(C/BA) = \\ = P(C) \cdot P(A/C) \cdot P(B/CA).$$

Аналогично получается общая формула для вероятности произведения произвольного числа зависимых событий:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2A_3 \ldots \\ \ldots A_{n-1})^*. \qquad (1.3.8)$$

Пусть в примере 1.3.1 событие C состоит в том, что в кабинет врача первым и вторым входят не Петров, а другие больные — Сидоров (B_1) и Иванов (B_2). Событие C — это произведение событий $B_1 \cdot B_2$.

* Знак «$\prod_{i=1}^{n}$» обозначает произведение всех сомножителей с порядковыми номерами от $i = 1$, до $i = n$.

Так как эти события зависимые, то $P(C) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1)$, где $P(B_1) = 1:3$, а $P(B_2/B_1) = 1:2$; поэтому $P(C) = 1:3 \cdot 1:2 = 1:6$.

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей сомножителей. На основе условий независимости (1.3.6) можем заменить в (1.3.8) все условные вероятности безусловными:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.3.9)$$

Пример 1.3.2. Пусть испытуемому предлагается отрезок прямой, ориентированный вертикально. Испытуемый должен, мысленно продолжая отрезок снизу вверх, указать точку, удаленную вверх на заданную дистанцию, в которой, по его мнению, будет находиться продолжение отрезка. Эксперименты показали, что, действуя правой рукой, испытуемые в большинстве случаев отклоняются от вертикали влево. Был организован специальный эксперимент, целью которого было установить, в каком направлении происходит отклонение точки, указанной испытуемым, если он действует либо правой, либо левой рукой. Результаты обследования 100 испытуемых представлены в табл. 1.3.1. Обозначив события, как показано в таблице, можно видеть, что имели место следующие четыре простых события: A_1 или A_2, B_1 или B_2 и четыре сложных события (произведения простых): A_1B_1 или A_1B_2, или A_2B_1, или A_2B_2. Простые события будем считать условиями опыта, а сложные — его исходами. Всего проведено 205 испытаний. Частоты совместного появления событий A_1 и A_2 с событиями B_1 и B_2 указаны в числителях правых третей соответствующих клеток табл. 1.3.1. Это $f(A_1B_1) = 12$, $f(A_1B_2) = 91$, $f(A_2B_1) = 84$ и $f(A_2B_2) = 18$. Частота безусловного появления события A_1 определяется суммой частот совместного появления этого события с событиями B_1 и B_2:

$$f(A_1) = f(A_1B_1) + f(A_1B_2) = 103.$$

Аналогично суммированием по вертикали частот $f(A_2B_1)$ и $f(A_2B_2)$ определяется частота безусловного появления события A_2: $f(A_2) = 102$. Суммированием по строкам определяются частоты событий B_1 и B_2: $f(B_1) = 96$ и $f(B_2) = 109$. Общее количество испытаний (n) должно быть равно сумме $f(A_1B_1) + f(A_1B_2) + f(A_2B_1) + f(A_2B_2)$ и сумме $f(A_1 + f(A_2)$, и сумме $f(B_1) + f(B_2)$. Выполнение этого тройного равенства — *обязательное условие* правильности табулирования результатов опыта и последующих вычислений. Поделив каждую из указанных частот на n, определяем соответствующие оценки вероятностей (частости). Они и указаны в табл. 1.3.1.

Определим теперь условные частости для событий A_1, A_2, B_1 и B_2 при всех условиях, когда происходили совместные с ними

К примеру 132 — Таблица 1.3.1

		Указывание точки: Левой рукой (событие A_1)	Указывание точки: Правой рукой (событие A_2)	$p(B_i)$
Отклонение от вертикали	Влево (событие B_1)	$p(A_1/B_1)=\frac{12}{96}$; $p(B_1/A_1)=\frac{12}{103}$; $p(A_1B_1)=\frac{12}{205}$	$p(A_2/B_1)=\frac{84}{96}$; $p(B_1/A_2)=\frac{84}{102}$; $p(A_2B_1)=\frac{84}{205}$	$p(B_1)=\frac{96}{205}$
	Вправо (событие B_2)	$p(A_1/B_2)=\frac{91}{109}$; $p(B_2/A_1)=\frac{91}{103}$; $p(A_1B_2)=\frac{91}{205}$	$p(A_2/B_2)=\frac{18}{109}$; $p(B_2/A_2)=\frac{18}{102}$; $p(A_2B_2)=\frac{18}{205}$	$p(B_2)=\frac{109}{205}$
$p(A_i)$		$p(A_1)=\frac{103}{205}$	$p(A_2)=\frac{102}{205}$	$\sum_i p(B_i)=\sum_i p(A_i)=\frac{205}{205}$

Таблица 1.3.2

События независимые, если все они попарно равновероятны

	Событие A_1	Событие A_2	$p(B_i)$
Событие B_1	0,50; 0,50; 0,25	0,50; 0,50; 0,25	0,50
Событие B_2	0,50; 0,50; 0,25	0,50; 0,50; 0,25	0,50
$p(A_i)$	0,50	0,50	1,00

События независимые, если равновероятна хотя бы одна пара противоположных событий

Таблица 1.3.3

	Событие A_1	Событие A_2	$p(B_i)$
Событие B_1	0,2; 0,5; 0,1	0,2; 0,5; 0,1	0,2
Событие B_2	0,8; 0,5; 0,4	0,8; 0,5; 0,4	0,8
$p(A_i)$	0,5	0,5	1,0

события. Событие В$_1$ наблюдалось всего 96 раз, из них 12 раз — при условии события В$_1$ — происходило событие А$_1$ и 84 раза — событие А$_2$. Соответствующие условные частости $p(A_1/B_1) = 12 : 96$ и $p(A_2/B_1) = 84 : 96$. Аналогично, событие В$_2$ наблюдалось всего 109 раз. Из них 91 раз происходило событие А$_1$: $p(A_1/B_2) = 91 : 109$ и 18 раз происходило событие А$_1$: $p(A_2/B_2) = 18 : 109$. Эти условные частости записываются, как показано в табл. 1.3.1.

Событие А$_1$ наблюдалось всего 103 раза. Из них 12 раз произошло событие В$_1$: $p(B_1/A_1) = 12 : 103$ и 91 раз — событие В$_2$: $p(B_2/A_1) = 91 : 103$. Аналогично определяются: $p(B_1/A_2) = 84 : 102$ и $p(B_2/A_2) = 18 : 102$.

Эти четыре условные частости записывают в рабочую таблицу так, как это сделано в табл. 1.3.1.

Сравнивая значения условных частостей, можно видеть, что они существенно отличаются от безусловных частостей. Это свидетельствует о том, что события A_1 и B_1, A_1 и B_2 A_2 и B_1 и A_2 и B_2 — попарно зависимые события. Убедимся в справедливости формулы (1.3.7) для вероятности произведениях двух событий. Например, $p(A_1B_1) = p(A_1) \cdot p(B_1/A_1) = p(B_1) \cdot p(A_2/B_1) = 103 : 205 \cdot 12 : 103 = 96 : 205 \cdot 12 : 96 = 12 : 205$. Из той же формулы (1.3.7) можно определить любой из членов, если известны два других. Например, можно вычислить условные вероятности, если известны безусловные вероятности и вероятности совместного появления пар событий.

Идеализируем наш пример. Допустим, что события A_1 и B_1, A_1 и B_2, A_2 и B_1, A_2 и B_2 попарно независимы. Тогда в результате опыта мы получили бы в идеальном случае все безусловные частости одинаковыми *, как это изображено в табл. 1.3.2. В таком случае частости совместного появления указанных пар событий, по формуле (1.3.9), определяются произведением безусловных частостей, так как все условные частости тоже одинаковы и равны безусловным (табл. 1.3.2). Отсюда следует первое правило, которое полезно запомнить в практических целях. Если события в системе независимы, то они равновероятны (их частости равны). И наоборот, если для совокупности событий в опыте получены равные частости появления, то события независимы в системе.

Легко убедиться, что условие независимости событий в системе из двух противоположных событий выполняется и тогда, когда безусловные частости для одной пары противоположных событий равны между собой, а для другой пары — не равны. Например, как показано в табл. 1.3.3, где при изменении частостей появления событий B_1 и B_2 частости появления событий A_1 и A_2 остаются неизменными. Отсюда второе правило, которое полезно запомнить. Если хотя бы одна пара противоположных событий в системе из двух пар таких событий A_i, B_i равновероятна, то события A_i и B_i независимы. Ниже мы специально рассмотрим вопрос о формах и мерах зависимости между событиями.

Вероятность суммы совместных событий определяется по одной из следующих формул:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2), \qquad (1.3.10)$$

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ - [P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3)] + P(A_1A_2A_3), \qquad (1.3.11)$$

---

* На практике эти частости не одинаковы, но отличаются они друг от друга незначимо (см. стр. 306).

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \quad (1.3.12)$$

Заметим, что формулы (1.3.10)—(1.3.12) выражают вероятность суммы совместных событий как суммы вероятностей произведений этих событий по одному, по два, по три и т. д. Но возможно и обратное представление. Вероятности произведений событий можно вычислить как суммы этих событий по одному, по два, по три и т. д.:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 + A_2), \quad (1.3.13)$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$$

$$- [P(A_1 + A_2) + P(A_1 + A_3) + P(A_2 + A_3)] + P(A_1 + A_2 + A_3), \quad (1.3.14)$$

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i + A_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i + A_j + A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right). \quad (1.3.15)$$

Все эти формулы могут оказаться полезными при расчетах вероятностей сложных событий.

Вероятность сложного события, представленного в виде суммы произведений простых событий, равна сумме произведений вероятностей. Пусть имеется событие A, которое может произойти вместе с одним из событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, образующих полную группу $\left(\text{т. е. } \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1\right)$*. Тогда вероятность события A определяется по так называемой *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i} P(B_i) \cdot P(A/B_i), \quad (1.3.16)$$

где $P(A/B_i)$ — условные вероятности того, что произойдет событие A, если произошло событие B_i. Рассмотрим практическое применение изложенных правил вычисления вероятностей сложных событий на примерах.

Пример 1.3.3. Даны события A, B и C; $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}2$. От этих событий зависит событие D, для которого условные вероятности совместного появления с событиями A, B и C соответственно равны: $P(D/A) = 0{,}4$; $P(D/B) = P(D/C) = 0{,}3$. Требуется определить вероятность появления события D.

Используем формулу полной вероятности (1.3.16), которая в данном случае приводит к следующей сумме произ-

---

* События B_i часто называют «гипотезами». Все B_i «включены» в A.

ведений: $P(\mathrm{D}) = P(\mathrm{A})\ P(\mathrm{D/A}) + P(\mathrm{B})P(\mathrm{D/B}) + P(\mathrm{C})P(\mathrm{D/C}) = P(\mathrm{A})P(\mathrm{D/A}) + P(\mathrm{D/B})\ [P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C})]$; подставляя заданные значения вероятностей и вычисляя, получаем ответ: $P(\mathrm{D}) = 0{,}35$.

Пример 1.3.4. Для оформления текста нужно из имеющихся технических шрифтов выбрать тот, при чтении букв которого люди делали бы меньше ошибок. С этой целью можно сравнить вероятности ошибок при чтении любой из букв каждого шрифтового начертания и выбрать тот шрифт, для которого эта вероятность наименьшая.

Факт ошибки при чтении надписи — событие сложное, обусловленное многими обстоятельствами. Чтобы выразить его в виде простых событий, введем некоторые упрощающие допущения.

1. Пренебрежем семантическими связями между буквами, словами и фразами текста и будем считать, во-первых, что появление каждой буквы не зависит от появления других букв, и, во-вторых, что для правильного прочтения текста необходимо правильно прочесть каждую из составляющих букв. 2. Пренебрежем возможностью зрительного анализатора человека к симультанному восприятию нескольких букв и будем считать восприятие букв в тексте сукцессивным, т. е. примем, что буквы появляются по одной. 3. Будем рассматривать ошибки при чтении только одной, но любой буквы. При этих допущениях факт ошибки при чтении может рассматриваться как сумма несовместных ошибок при чтении каждой из букв, появляющихся независимо друг от друга. Пусть E_k — ошибка при чтении одной (любой) буквы текста, оформленного k-тым техническим шрифтом из числа проверяемых, а D_i — ошибка, состоящая в том, что появляющуюся i-тую букву человек читает ошибочно. Тогда на основе сказанного

$$\mathrm{E}_k \equiv \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 + \ldots + \mathrm{D}_{32} + \mathrm{D}_{33} \equiv \sum_{i=1}^{33} \mathrm{D}_i. \qquad (1.3.17)$$

Вероятность этой суммы равна сумме вероятностей слагаемых:

$$P(\mathrm{E}_k) = \sum_i P(\mathrm{D}_i). \qquad (1.3.18)$$

Обозначим факт появления i-той буквы в тексте как событие A_i, а вероятность A_i — как $P(\mathrm{A}_i)$. Кроме того, так как в различных технических шрифтах заглавные и строчные буквы обычно различаются по начертанию, введем в рассмотрение событие B, состоящее в том, что i-тая буква является заглавной, и событие C, состоящее в том, что это строчная буква. Вероятности этих событий — $P(\mathrm{B})$ и $P(\mathrm{C})$ соответственно. Появление конкретных букв и то, что эти буквы суть заглавная или строчная, никак не связаны между собой. Поэтому события A_i, B и C попарно независимы, а факты появления заглавной или строчной i-той

буквы следует рассматривать как произведения независимых событий, вероятности которых соответственно равны:

$$P(A_iB) = P(A_i) \cdot P(B) \text{ и } P(A_iC) = P(A_i) \cdot P(C). \quad (1.3.19)$$

Напротив, ошибка в прочтении буквы обусловлена как фактом ее появления (нельзя ошибиться в прочтении буквы, которую не видел!), так и вариантом начертания — строчным или заглавным. Поэтому события D_i и A_iB, и D_i и A_iC попарно зависимы. Следовательно, вероятность ошибки в случае появления заглавной i-той буквы — обозначим ее $P(D_i/B)$ — должна определяться как произведение вероятности появления i-той заглавной буквы $P(A_iB)$ на условную вероятность ошибки в этом случае $P(D_i/A_iB)$:

$$P(D_iB) = P(A_iB) \cdot P(D_i/A_iB). \quad (1.3.20)$$

Аналогично, в случае появления строчной i-той буквы

$$P(D_i/C) = P(A_iC) \cdot P(D_i/A_iC). \quad (1.3.21)$$

В силу несовместности событий B и C, вероятность ошибиться при чтении заглавной или строчной i-той буквы, обозначим ее $P(D_i)$, есть сумма вероятностей несовместных событий:

$$P(D_i) = P(D_i/B) + P(D_i/C). \quad (1.3.22)$$

Подставляя в (1.3.22) значения слагаемых и сомножителей из (1.3.19), (1.3.20) и (1.3.21), запишем:

$$P(D_i) = P(A_i) \cdot [P(B)\, P(D_i/A_iB) + P(C)\, P(D_i/A_iC)]. \quad (1.3.23)$$

Подставляя уравнение (1.3.23) в уравнение (1.3.18), окончательно получаем формулу интересующей нас вероятности ошибки при чтении одной (любой) буквы в тексте, с учетом принятых допущений:

$$P(E_k) = \sum_{i=1}^{33} P(A_i) \cdot [P(B) \cdot P(D_i/A_iB) + P(C) \cdot P(D_i/A_iC)]. \quad (1.3.24)$$

Введя еще одно допущение, а именно, что буквы текста читаются человеком при дефиците времени, можно моделировать интересующую нас ситуацию в эксперименте с тахистоскопическим равновероятным предъявлением в случайном порядке отдельных букв из числа алфавита определенного шрифтового начертания; каждая i-тая буква дается в двух вариантах — заглавном и строчном. При коротких экспозициях, создающих дефицит времени, восприятие буквы затрудняется. Такой эксперимент проводился для нескольких технических шрифтов и 30 букв алфавита. В результате были определены оценки вероятностей $p(D_i/A_iB)$ и $p(D_i/A_iC)$, приведенные в табл. 1.3.4 для заглавного и строчного вариантов двух шрифтов — стандартного и архитектурного, сравнением которых мы ограничимся в данном при-

Таблица 1.3.4

Оценки вероятностей $p(A_i)$, $p(D_i/A_iB)$ и $p(D_i/A_iC)$

Пояснения см. в тексте примера 1.3.4.

i-№ пп	Буквы	$p(A_i)$ *	Шрифты			
			Стандартный		Архитектурный	
			$p(D_i/A_iB)$	$p(D_i/A_iC)$	$p(D_i/A_iB)$	$p(D_i/A_iC)$
1	А	0,060	0,355	0,100	0,372	0,300
2	Б	0,010	0,193	0,300	0,096	0,300
3	В	0,036	0,000	0,000	0,248	0,496
4	Г	0,009	0,000	0,284	0,514	0,142
5	Д	0,024	0,029	0,245	0,116	0,098
6	Е	0,076	0,111	0,048	0,111	0,178
7	Ж	0,006	0,249	0,332	0,249	0,166
8	З	0,014	0,200	0,000	0,141	0,200
9	И	0.074	0,000	0,528	0,442	0,096
10	К	0,027	0,125	0,000	0,000	0,333
11	Л	0,036	0,310	0,123	0,248	0,287
12	М	0,027	0,200	0,000	0 200	0,666
13	Н	0,060	0,071	0,249	0,284	0,166
14	О	0,096	0,055	0,071	0,230	0,568
15	П	0,028	0,000	0,249	0,200	0,646
16	Р	0,044	0,000	0,000	0,286	0,250
17	С	0,044	0,259	0,285	0,296	0,142
18	Т	0,061	0,082	0,124	0,287	0,432
19	У	0,020	0,186	0,135	0,372	0,360
20	Ф	0,005	0,000	0,000	0,330	0,500
21	Х	0,011	0,000	0,000	0,083	0,750
22	Ц	0,004	0,166	0,120	0,664	0,200
23	Ч	0,014	0,000	0,143	0,498	0,143
24	Ш	0,005	0,100	0,133	0,200	0,386
25	Щ	0,004	0,090	0,231	0,270	0,308
26	Ы	0,018	0,066	0,143	0,188	1,000
27	Ь	0,011	0,000	0,000	0,000	0,286
28	Э	0,005	0,120	0,462	0,040	0,077
29	Ю	0,009	0,000	0,166	0,500	0,498
30	Я	0,019	0,066	0,333	0,132	0,333

* Оценки $p(A_i)$ округлены до тысячных.

мере. Вероятности $P(A_i)$ для всех букв алфавита в реальных текстах отнюдь не одинаковы. Также различаются и вероятности P(B) и P(C). Можно уточнить значения этих вероятностей, воспользовавшись данными статистического анализа русских текстов.

В качестве оценок вероятностей появления букв в тексте воспользуемся данными Д. С. Лебедева и В. А. Гармаша о независимых вероятностях графем русского языка, определенных на смешанных текстах *. Эти вероятности также приведены в таблице 1.3.4. Данные о лингвистической вероятности заглавных и строчных букв в русских текстах нами в литературе не обнаружены. Поэтому попытаемся получить оценку для интересующих нас вероятностей косвенным путем, а именно, используя данные о средней длине слова (в буквах) и о средней длине фразы (в словах). Для большинства общенаучных и художественных текстов количество появлений заглавной буквы не меньше количества появлений законченной фразы (предложения), так как фраза всегда начинается с заглавной буквы. Конечно, в научных текстах встречаются специальные условные обозначения в виде заглавных русских букв, а в художественных эти буквы встречаются в начале имен собственных. Поэтому оценка p(В) только по числу законченных фраз представляет собой оценку снизу. Но в первом приближении мы ею воспользуемся.

Пусть во фразе n букв, тогда количество заглавных букв равно 1, а в строчных $n - 1$. Соответственно вероятность появления заглавной буквы равна $1/n$, а строчной $n - 1/n$. По данным, приводимым Н. Д. Андреевым, средняя длина слова для художественных, общенаучных и технических текстов составляет соответственно 5 и 6,9 буквы **. Средняя длина фразы для тех же текстов составляет соответственно 20,3 и 19,8 слова ***. Можно, усреднив эти данные, принять, что для указанных текстов средняя длина слова составляет 6 букв, а средняя длина фразы — 20 слов. Отсюда среднее количество букв во фразе тех же текстов — это 120 букв. Тогда $p(\text{В}) = 1 : 20 \approx 0{,}008$, $p(\text{С}) = 119 : 120 \approx 0{,}992$. Используя эти значения и оценки условных вероятностей из табл. 1.3.4, по уравнению (1.3.24) мы рассчитали вероятности $p(\text{Е}_1)$ и $p(\text{Е}_2)$ соответственно для стандартного и архитектурного шрифтов ****. Промежуточные величины приведены в табл. 1.3.5 и 1.3.6. Окончательные значения вероятностей $p(\text{Е}_1) = 0{,}134$ и $p(\text{Е}_2) = 0{,}286$ показывают, что ошибки при чтении букв стандартного шрифта менее вероятны, и следовательно, для оформления текста лучше использовать стандартный, а не архитектурный шрифт.

Пример 1.3.5. В примере 1.1.3 мы рассматривали вероятность события А, состоящего в том, что человек-оператор, контролируя показания приборов, размещенных на приборной панели опти-

---

* Н. Д. Андреев. Статистико-комбинаторные методы в теоретическом и прикладном языковедении. «Наука», 1967. (См. Приложение I, таблица 1, стр. 226).

** Там же, таблица 44, стр. 247.

*** Там же, таблица 65, стр. 260.

**** Мы выполняли промежуточные расчеты с точностью до шестого знака справа от запятой.

Таблица 1.3.5

Стандартный шрифт

Буквы	$p(B)\cdot p(D_i/A_iB)$	$p(C)\cdot p(D_i/A_iC)$	$\Sigma_{1 и 2}$	$p(A_i)\cdot\Sigma_{1 и 2}$
А	0,002840	0,099200	0,102040	0,006122
Б	0,001544	0,297600	0,299144	0,002991
В	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
Г	0,000000	0,281728	0,281728	0,002536
Д	0,000232	0,243040	0,243272	0,005838
Е	0,000888	0,047616	0,048504	0,003686
Ж	0,001992	0,329344	0,331336	0,001988
З	0,001600	0,000000	0,001600	0,000022
И	0,000000	0,523776	0,523776	0,038759
К	0,001000	0,000000	0,001000	0,000027
Л	0,002480	0,122016	0,124496	0,004482
М	0,001600	0,000000	0,001600	0,000043
Н	0,000568	0,247008	0,247576	0,014855
О	0,000440	0,070432	0,070872	0,006804
П	0,000000	0,247008	0,247008	0,006916
Р	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
С	0,002072	0,282720	0,284792	0,012531
Т	0,000656	0,123008	0,123664	0,007544
У	0,001488	0,133920	0,135408	0,002708
Ф	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
Х	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
Ц	0,001328	0,119040	0,120368	0,000481
Ч	0,000000	0,141856	0,141856	0,001986
Ш	0,000800	0,131936	0,132736	0,000664
Щ	0,000720	0,229152	0 229872	0,000919
Ы	0,000528	0,141856	0,142384	0,002563
Ь	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
Э	0,000960	0,485304	0,459264	0,002296
Ю	0,000000	0,164672	0,164672	0,001482
Я	0,000528	0,330336	0,330864	0,006286

$p(E_{станд.}) = 0{,}134529 \approx 0{,}134$

мальных размеров (см. рис. 1.1.4), посмотрит на один из приборов. Установлено, что $P(A) = 0{,}019$, если считать положение прибора в любом участке площади панели равновозможным, а также считать равновероятными осмотры любого участка панели. Но эти упрощающие предположения на практике не выполняются. Поэтому в данном примере введем усложняющие вопрос обстоятельства: неравновероятное расположение приборов и неравновероятное перемещение глаз оператора по приборной панели.

Архитектурный шрифт

Буквы	$p(B) \cdot p(D_i/A_iC)$	$p(C) \cdot p(D_i/AC)$	$\Sigma_{1 и 2}$	$p(A_i) \cdot \Sigma_{1 и 2}$
А	0,002976	0,297600	0,300576	0,018035
Б	0,000768	0,297600	0,298368	0,002984
В	0,001984	0,492032	0,494016	0,017785
Г	0,004112	0,140864	0,144976	0,001305
Д	0,000928	0,097216	0,098144	0,002355
Е	0,000888	0,176576	0,177464	0,013487
Ж	0,001992	0,164672	0,166664	0,001000
З	0,001128	0,198400	0,199528	0,002793
И	0,003536	0,095232	0,098768	0,007309
К	0,000000	0,330336	0,330336	0,008919
Л	0,001984	0,284704	0,286688	0,010321
М	0,001600	0,660672	0,662272	0,017881
Н	0,002272	0,164672	0,166944	0,010017
О	0,001840	0,563456	0,565296	0,054268
П	0,001600	0,640832	0,642432	0,017988
Р	0,002288	0,248000	0,250288	0,011013
С	0,002368	0,140864	0,143232	0,006302
Т	0,002296	0,428544	0,430840	0,026281
У	0,002976	0,357120	0,360096	0,007202
Ф	0,002640	0,496000	0,498640	0,002493
Х	0,000664	0,744000	0,744664	0,008191
Ц	0,005312	0,198400	0,203712	0,000815
Ч	0,003984	0,141856	0,145840	0,002042
Ш	0,001600	0,382912	0,384512	0,001923
Щ	0,002160	0,305536	0,307696	0,001231
Ы	0,001504	0,992000	0,993504	0,017883
Ь	0,000000	0,283712	0,283712	0,003121
Э	0,000320	0,076384	0,076704	0,000384
Ю	0,004000	0,494016	0,498016	0,004482
Я	0,001056	0,330336	0,331392	0,006296

$p(E_{арх}) = 0{,}286106 \approx 0{,}286$

Разобьем всю панель на части — квадранты, перенумерованные, как показано на рис. 1.1.4, и введем событие B_i — расположение прибора в одном из квадрантов ($i = 1, 2, 3, 4$); соответственно есть события B_1, B_2, B_3 и B_4.

Вероятность прибору очутиться в одном из квадрантов определим геометрически как отношение площади i-го квадранта к общей площади приборной панели. При этом учтем, что площади квадрантов 1 и 2, а также 3 и 4 попарно равны (см. рис. 1.1.4). Поэтому $P(B_1) = P(B_2) = 3060 : 16728 \approx 0{,}183$; $P(B_3) =$

$= P$ (B_4) $=$ 5304 : 16728 $\approx$ 0,317. Можно определить эти вероятности, рассуждая иначе. Очевидно, прибор обязательно расположен в одном из четырех квадрантов, поэтому события B_1, B_2, B_3 и B_4 образуют полную группу событий, и $\sum\limits_i P(B_i) = 1$. Так как суммы площадей «правых» и «левых» квадрантов (см. рис. 1.1.4) равны, то $P(B_1) + P(B_4) = P(B_2) + P(B_3) = 0{,}5$. Вычислив через отношение площадей любую из $P(B_i)$, определяем другую, как дополняющую $P(B_i)$ до 0,5.

Рассмотрим далее событие C_i, состоящее в том, что первым (по времени осмотра) будет осмотрен i-тый квадрант. Соответственно, есть события C_1, C_2, C_3, C_4, которые также образуют полную группу. Как показывают эксперименты, частости первого «скачка» глаз в определенный квадрант весьма неодинаковы: $p(C_1) = 0{,}295$; $p(C_2) = 0{,}615$; $p(C_3) = 0{,}060$ и $p(C_4) = 0{,}030$ *.

Введем в рассмотрение еще и второй «скачок» глаз человека-оператора — событие D_j, состоящее в том, что вторым будет осмотрен i-тый квадрант; соответственно есть события D_1, D_2, D_3 и D_4. Вероятность направления второго «скачка» глаз оператора зависит от того, в каком направлении осуществлен первый «скачок». Если первый «скачок» был в i-тый квадрант, то второй «скачок» в тот же квадрант — событие невозможное; поэтому $P(D_1/C_1) = 0$, $P(D_2/C_2) = 0$, $P(D_3/C_3) = 0$, $P(D_4/C_4) = 0$. Остальные условные вероятности событий D_j при условии, что имели место события C_i, приведены на рис. 1.3.1. Отметим, что все возможные комбинации событий D_j при условии появления каждого из событий C_i составляют полную группу.

Все перечисленные события можно изобразить в виде «дерева» или графа исходов, подобно тому, как это сделано для примера 1.2.1 (см. рис. 1.2.1). Но в данном случае «дерево» оказывается слишком «ветвистым» (96 исходов). Мы поэтому изобразили на рис. 1.3.1 только часть возможных исходов. Изображение исходов опыта в виде графа очень наглядно и удобно для подсчета вероятностей всех интересующих исследователя событий. В связи с этим несколько поясним рис. 1.3.1. Кружками (прямоугольниками и т. п.) обозначаются события; линиями (стрелками) — связаны совместные события. Ряд совместных событий, объединенный линиями, образует ветвь (или цепь) и представляет собой исход опыта. Общее количество исходов определяется по числу ветвей. События подразделены на «уровни» (или «шаги») и «группы». Внутри «уровня», а также внутри группы события образуют полную группу событий. Поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Вероятности обычно подписывают на стрелках или над событиями, как на рис. 1.3.1. Слева целесообразно записывать для каждого уровня перечень соответствующих событий.

---

* В. Гайда, Ю. А. Лаптев. О структуре маршрута движения глаз. В сб. : Проблемы инженерной психологии, вып. 2, М., 1968, стр. 248.

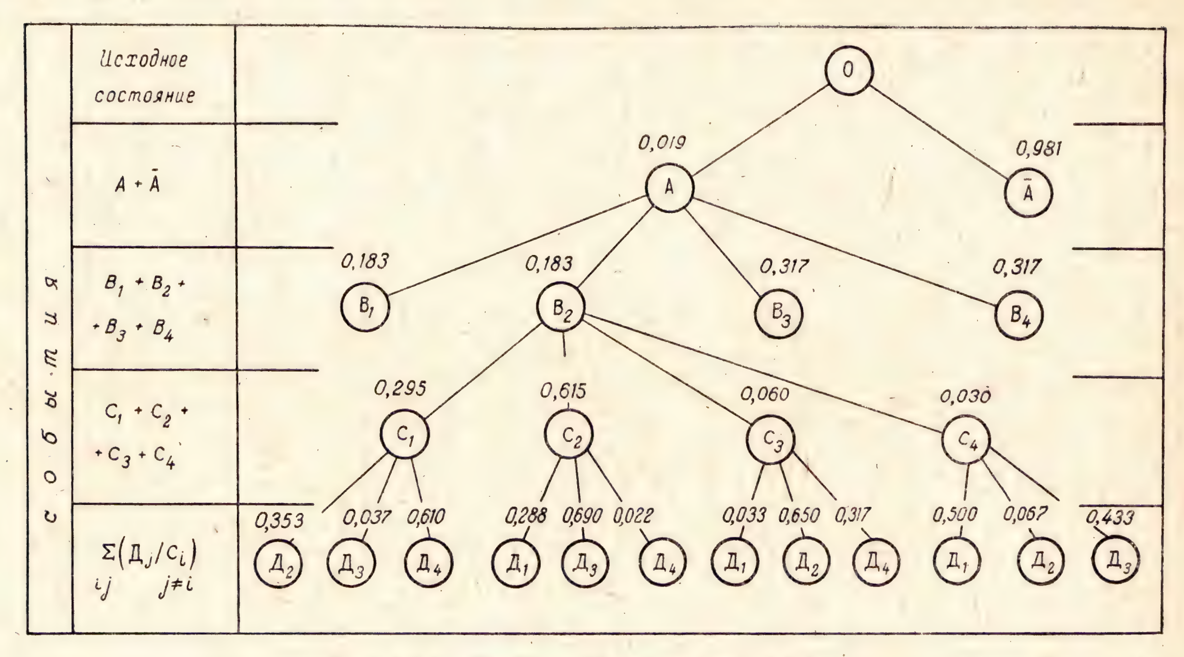


Рис. 1.3.1. Граф исходов примера 1.3.5.

Сверху над событиями указаны их вероятности. Для событий B_1, B_3 и B_4 имеют место такие же исходы с событиями C_i и D_j, как изображенные для события B_2. Они на графе опущены. Опущены также все возможные исходы события $\overline{A}$, в точности подобные исходам события A.

Поясним два события, представленные на рис. 1.3.1, которые выше не рассмотрены. Исходное состояние обычно обозначают «0». Его вероятность $P(0) = 1$. В сущности, исходное состояние может быть каким-то случайным событием среди группы других событий, с вероятностью $P(0) < 1$, т. е. можно в качестве исходного принять любое из событий А, В и т. п., дающих начало новому ветвлению. Рассмотрим событие А. Если событие А, как обозначено выше, состоит в том, что человек-оператор посмотрит на прибор, расположенный среди других на приборной панели, то противоположное ему событие $\overline{A}$ состоит в том, что человек-оператор не посмотрит на этот прибор: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, и так как $P(A) = 0{,}019$, то $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}019 = 0{,}981$.

Теперь займемся вычислением некоторых вероятностей. При этом будем называть событием χ_i какое-либо сложное событие, состоящее из простых событий графа исходов (рис. 1.3.1).

1. Пусть событие E_i состоит в том, что человек-оператор посмотрит на прибор, расположенный в i-том квадранте. При этом будем, как и в примере 1.1.3, предполагать вероятности направления «скачка» глаз в любой из квадрантов одинаковыми. Легко видеть, что событие E_i представляет собой произведение двух совместных независимых событий А и B_i (где $i = 1, 2, 3, 4$). Поэтому $P(E_i)$ — вероятность посмотреть на прибор, расположенный в i-том квадранте панели оптимальных размеров, равна

$$P(E_i) = P(A) \cdot P(B_i).$$

Подставляя в это уравнение значения соответствующих вероятностей, получаем: $P(E_1) = 0{,}019 \cdot 0{,}183 = 0{,}0035$; $P(E_2) = 0{,}019 \cdot 0{,}0183 = 0{,}0035$; $P(E_3) = 0{,}019 \cdot 0{,}317 = 0{,}006$; $P(E_4) = 0{,}019 \cdot 0{,}317 = 0{,}006$.

Заметим, что $\Sigma_i P(E_i) = 0{,}019$ *. Этого и следовало ожидать, так как вероятности $P(E_i)$ представляют собой части $P(A)$ так же, как события E_i — «части» события А — включены в А. **

2. Пусть событие F_j состоит в том, что человек-оператор посмотрит на прибор (событие А), расположенный в i-том квадранте (событие B_i), при условии, что первым будет осмотрен i-тый квадрант (событие C_i). Иначе говоря, событие F_j можно рассматривать как совместное появление событий E_i и C_i, или, дезукрупняя событие E_i, как произведение событий AB_iC_i. Таким образом, здесь возможны следующие шестнадцать событий:

1) AB_1C_1	5) AB_2C_1	9) AB_3C_1	13) AB_4C_1
2) AB_1C_2	6) AB_2C_2	10) AB_3C_2	14) AB_4C_2
3) AB_1C_3	7) AB_2C_3	11) AB_3C_3	15) AB_4C_3
4) AB_1C_4	8) AB_2C_4	12) AB_3C_4	16) AB_4C_4

* $\sum_i P(E_i) = \sum_i P(A) \cdot P(B_i) = P(A) \cdot \underbrace{\sum_i P(B_i)}_{1} = P(A).$

** Здесь отметим, что если событие В включено в А, т. е. из В следует А, то $P(B) \leqslant P(A)$, причем равенство достигается лишь при $A \equiv B$.

Из них на рис. 1.3.1 изображены только события 5—8, остальные не показаны. Вероятности этих сложных событий определяются как произведения вероятностей событий-сомножителей. Заметим, что сумма всех шестнадцати вероятностей снова должна быть равна P (A), т. е.

$$\sum_{j=1}^{16} P_j(\mathrm{AB}_i\mathrm{C}_i) = P(\mathrm{A}).$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{4} P_j(\mathrm{AB}_1\mathrm{C}_i) = P(\mathrm{E}_1), \quad \sum_{j=5}^{8} P_j(\mathrm{AB}_2\mathrm{C}_i) = P(\mathrm{E}_2),$$

$$\sum_{j=9}^{12} P_j(\mathrm{AB}_3\mathrm{C}_i) = P(\mathrm{E}_3), \quad \sum_{j=13}^{16} P_j(\mathrm{AB}_4\mathrm{C}_i) = P(\mathrm{E}_4).$$

Эти равенства должны выполняться по условиям включения событий (см. сноску ** на стр. 45), они нужны для проверки правильности вычислений.

Вычислим вероятности события F_j при $j = 5 \div 12$; остальные вероятности будут равны этим из-за симметричности правой и левой половин приборной панели.

II квадрант	I квадрант	
$P(\mathrm{F}_5) = 0{,}0010$	$P(\mathrm{F}_1) = 0{,}0010$	
$P(\mathrm{F}_6) = 0{,}0022$	$P(\mathrm{F}_2) = 0{,}0022$	
$P(\mathrm{F}_7) = 0{,}0002$	$P(\mathrm{F}_3) = 0{,}0002$	
$P(\mathrm{F}_8) = 0{,}0001$	$P(\mathrm{F}_4) = 0{,}0001$	
$\sum_{j=5}^{j=8} P(\mathrm{F}_j) = 0{,}0035$	$\sum_{j=1}^{j=4} P(\mathrm{F}_j) = 0{,}0035$	(1.3.25)
III квадрант	**IV квадрант**	
$P(\mathrm{F}_9) = 0{,}00177$	$P(\mathrm{F}_{13}) = 0{,}00177$	
$P(\mathrm{F}_{10}) = 0{,}00370$	$P(\mathrm{F}_{14}) = 0{,}00370$	
$P(\mathrm{F}_{11}) = 0{,}00036$	$P(\mathrm{F}_{15}) = 0{,}00036$	
$P(\mathrm{F}_{12}) = 0{,}00018$	$P(\mathrm{F}_{16}) = 0{,}00018$	
$\sum_{j=9}^{j=12} P(\mathrm{F}_j) = 0{,}0060$	$\sum_{j=13}^{j=16} P(\mathrm{F}_j) = 0{,}0060$	

3. Пусть событие H_k состоит в том, что человек-оператор посмотрит на прибор (событие A), расположенный в i-том квадранте (событие B_i) при условии, что вторым (событие D_j) после первого (событие C_i) будет осмотрен i-тый квадрант. Событие H_k можно рассматривать как произведение событий $\mathrm{F}_j \cdot \mathrm{D}_j$. Всего таких произведений 48, но 16 из них — невозможные события, т. е. те, в которых сомножители $\mathrm{C}_i\mathrm{D}_j$ имеют одинаковые номера ($i = j$). Для вероятностей $P(\mathrm{H}_k)$ можно сформулировать проверочные требования, аналогичные таковым для вероятностей $P(\mathrm{E}_i)$ и $P(\mathrm{F}_j)$. Например, $\sum_{k=2}^{k=4} P(\mathrm{H}_k) = P(\mathrm{F}_1)$, $\sum_{k=5,\, k\neq 6}^{k=8} P(\mathrm{H}_k) =$

$= P(F_2)$, и т. д. Вычислим вероятности $P(H_k)$ для двенадцати событий H_k, представленных на рис. 1.3.1:

$$H_{14} = F_5D_2 \quad H_{17} = F_6D_1 \quad H_{21} = F_7D_1 \quad H_{25} = F_8D_1$$
$$H_{15} = F_5D_3 \quad H_{19} = F_6D_3 \quad H_{22} = F_7D_2 \quad H_{26} = F_8D_2$$
$$H_{16} = F_5D_4 \quad H_{20} = F_6D_4 \quad H_{24} = F_7D_4 \quad H_{27} = F_8D_3.$$

Подставляя значения соответствующих вероятностей и частостей из (1.3.25) и нижнего уровня графа событий (рис. 1.3.1), получаем:

$$P(H_{14}) = 0{,}00035 \qquad P(H_{17}) = 0{,}00063$$
$$P(H_{15}) = 0{,}00004 \qquad P(H_{19}) = 0{,}00152$$
$$P(H_{16}) = 0{,}00061 \qquad P(H_{20}) = 0{,}00005$$
$$\sum_{k=14}^{k=16} P(H_k) = 0{,}0010 = P(F_5) \qquad \sum_{k=17,\, k\neq 18}^{k=20} P(H_k) = 0{,}0022 = P(F_6)$$

$$P(H_{21}) = 0{,}0000066 \qquad P(H_{25}) = 0{,}0000500$$
$$P(H_{22}) = 0{,}0001300 \qquad P(H_{26}) = 0{,}0000067$$
$$P(H_{24}) = 0{,}0000634 \qquad P(H_{27}) = 0{,}0000433$$
$$\sum_{k=21,\, k\neq 23}^{k=24} P(H_k) = 0{,}0002 = P(F_7) \qquad \sum_{k=25}^{k=27} P(H_k) = 0{,}0001 = P(F_8).$$

4. Определим вероятность взглянуть на нужный прибор с первого «скачка» глаз. Эта вероятность складывается из четырех слагаемых: $P(I) = P(AB_1C_1) + P(AB_2C_2) + P(AB_3C_3) + P(AB_4C_4)$, где $P(AB_1C_1)$ — вероятность того, что с первого «скачка» глаз будет обнаружен прибор, расположенный в первом квадранте; $P(AB_2C_2)$ — вероятность взглянуть с первого «скачка» глаз на прибор во втором квадранте; $P(AB_3C_3)$ — то же в третьем квадранте; $P(AB_4C_4)$ — в четвертом квадранте.

Вычисляя вероятности произведений по данным рис. 1.3.1, соответственно, получаем: $P(I) = 0{,}00100 + 0{,}00214 + 0{,}00036 + 0{,}00018 = 0{,}00368$.

5. Определим вероятности взглянуть с первого «скачка» глаз на прибор, расположенный в правой половине и в левой половине приборной панели; в ее верхней и нижней части. $P(\text{прав.}) = P(AB_1C_1) + P(AB_4C_4) = 0{,}00118$, $P(\text{лев.}) = P(AB_2C_2) + P(AB_3C_3) = 0{,}00250$, $P(\text{верх.}) = P(AB_1C_1) + P(AB_2C_2) = 0{,}00314$, $P(\text{низ}) = P(AB_3C_3) + P(AB_4C_4) = 0{,}00054$.

6. Определим вероятность взглянуть на прибор только со второго «скачка» глаз ($P(II)$). Эта вероятность тоже состоит из четырех слагаемых: $P(II) = P(D_1/B_1) + P(D_2/B_2) + P(D_3/B_3) + P(D_4/B_4)$, где каждое из слагаемых, в свою очередь, есть сумма трех слагаемых: $P(D_1/B_1) = P(AB_1C_2D_1) + P(AB_1C_3D_1) + P(AB_1C_4D_1)$ — вероятность вторым «скачком» глаз взглянуть на прибор в первом квадранте. Так как второй «скачок» глаз имеет специфическую условную вероятность, в зависимости от того, куда был направлен первый «скачок», то рассматриваемая вероятность

и суммируется из трех соответствующих вероятностей. Аналогично: $P(D_2/B_2) = P(AB_2C_1D_2) + P(AB_2C_3D_2) + P(AB_2C_4D_2)$, $P(D_3/B_3) = P(AB_3C_1D_3) + P(AB_3C_2D_3) + P(AB_3C_4D_3)$, $P(D_4/B_4) = P(AB_4C_1D_4) + P(AB_4C_2D_4) + P(AB_4C_3D_4)$.

Вычислив указанные вероятности, окончательно получаем: $P(II) = 0{,}00079 + 0{,}00049 + 0{,}00270 + 0{,}00128 = 0{,}00526$.

7. Теперь можем определить вероятности посмотреть на прибор за первые два «скачка» глаз и посмотреть за большее, чем два количество «скачков». Вероятность посмотреть на прибор за первые два «скачка» глаз определяется как сумма несовместных событий: $P(I + II) = P(I) + P(II) = 0{,}00368 + 0{,}00526 \approx \approx 0{,}01$. Вероятность посмотреть на прибор за большее, чем два количество «скачков» глаз определяется как вероятность противоположного события: $P(I + II) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

Заканчивая пример, подчеркнем еще раз два обстоятельства. Первое — по графу исходов рассчитываются вероятности любых сложных событий. И второе — эти вероятности вычисляются по формуле полной вероятности на основе вероятностей (безусловных и условных) простых событий.

1.3.2. Ранжирование событий в системе по вероятностям

Если события в системе не равновероятны, то вероятность можно рассматривать как характеристику *значимости* события, — конечно, только в смысле возможности появления и только в данной системе событий, образующих полную группу. В этом смысле и говорят о вероятностном «весе» события (или о «весе» по вероятности) *. События с большой вероятностью имеют большой «вес», а события с малой вероятностью — малый «вес». При геометрическом изображении вероятностей событий аналогия с весом в его обычном понимании достаточно полная. Эта аналогия основывается на привычке оценивать физический вес предмета по его зрительно воспринимаемой величине. Поэтому-то геометрически большая площадь и ассоциируется в нашем представлении с большим весом фигуры. «Вес» события является одной из важнейших его характеристик в системе событий, поскольку по «весу» события в системе можно сравнивать и упорядочивать. Часто из большого числа событий представляют интерес не все, а лишь достаточно частые события.

---

* В смежных науках, используемых в психологической практике, понятие «вес» многозначно. Используются: «вес» в смысле субъективной или объективной ценности (теория игр), в смысле стабильности результатов измерения от опыта к опыту (теория вероятностей, метрология), в смысле количества информации. В частности, понятие информационного «веса» сообщения (рассматриваемого как событие) прямо противоположно по смыслу понятию вероятностного «веса», так как количество информации, несомой событием, тем больше, чем меньше вероятность этого события.

Наиболее вероятное событие (или класс событий) в системе называется *модальным* событием (классом) или просто *модой*. Исключив из рассмотрения моду, среди остальных событий можно найти новое модальное событие, затем среди оставшихся — новую моду и т. д. Таким путем все события в системе можно упорядочить (ранжировать) по убыванию их вероятности. *Ранжирование* можно выполнить и по возрастанию «веса» событий. После ранжирования событиям присваиваются порядковые номера * (или ранги), которые приближенно характеризуют (в числах натурального ряда) возможности появления событий в системе. Ранжированные по вероятности события удобно представлять графически в виде столбиковых и круговых диаграмм распределения вероятностей.

Пример 1.3.6. В табл. 1.3.7 представлено распределение диагнозов психически больных людей, обследованных при изучении расстройств мышления **. Можно видеть, что среди девяти

Таблица 1.3.7

Распределение (исходное) больных по диагнозу

Диагноз (заболевание)	Оценка вероятности
Шизофрения	0,25
Эпилепсия	0,07
Сосудистые заболевания головного мозга	0,22
Травмы головного мозга	0,26
Олигофрения	0,06
Энцефалиты	0,04
Прогрессивный паралич	0,04
Маниакально-депрессивный психоз	0,02
Психопатии	0,04

заболеваний равновероятными являются только три; остальные существенно не равновероятны. Модальный диагноз — травмы головного мозга, на втором месте (по убыванию вероятности) — шизофрения, на третьем — сосудистые заболевания головного мозга. Эти три диагноза имеют место с вероятностью (суммарно) более $^2/_3$, тогда как остальные шесть диагнозов — только $^1/_3$. Ранжировав все диагнозы по убыванию вероятностей, получаем табл. 1.3.8, из которой хорошо видны сравнительные «веса» каждого из девяти диагнозов. Отметим, что энцефалиты, прогрессивный паралич и психопатии, которые равновероятны, получили ранг, равный среднему из рангов (6, 7 и 8), которые бы они занимали, будучи неравновероятными.

* Если два или более событий равновероятны, то им присваивается одно и то же среднее значение из порядковых номеров, которые они бы получили, будучи не равновероятными.

** См. Б. В. Зейгарник. Патология мышления. Изд. МГУ, 1962, стр. 70.

Таблица 1.3.8

Ранжированное распределение больных по диагнозу

Диагноз (заболевание)	Оценка вероятности	Ранг по вероятности
Травмы головного мозга	0,26	1
Шизофрения	0,25	2
Сосудистые заболевания головного мозга	0,22	3
Эпилепсия	0,07	4
Олигофрения	0,06	5
Энцефалиты	0,04	7
Прогрессивный паралич	0,04	7
Психопатии	0,04	7
Маниакально-депрессивный психоз	0,02	9

0,483 0,281 0,183 0,053

а

1 2 3 4

2 3 4 1

б

Рис. 1.3.2. Диаграммы распределения вероятностей «классифицированных» событий.

а — столбиковая; *б* — круговая. Ранги соответствуют суждениям из табл. 1.3.9.

0,77 0,23 I класс

0,80 0,20 II класс

0,68 0,32 III класс

0,93 0,07 IV класс

A $\bar{A}$

Рис. 1.3.3. Последовательность столбиковых диаграмм к примеру 1.3.8.

Пример 1.3.7. В табл. 1.3.9 представлены ранжированные по вероятности суждения взрослых людей (восемь лет тому назад окончивших школу), характеризующие внешний облик школьных учителей *. Изобразим эти же данные в виде диаграмм распре-

* См. А. А. Бодалев. Восприятие человека человеком. Изд. ЛГУ, 1965, стр. 75.

деления вероятностей. Столбиковая диаграмма представлена на рис. 1.3.2, *а*. Площади столбиков, соответствующих событиям,

Таблица 1.3.9

К примеру 1.3.7

Суждения, характеризующие:	Оценка вероятности	Ранг по вероятности
Физический облик	0,483	1
Мимику и пантомимику	0,281	2
Внешность в целом	0,183	3
Оформление внешности	0,053	4

пропорциональны оценкам вероятности из табл. 1.3.9. Расстояния между столбиками могут быть произвольными, но лучше их располагать на одной горизонтали, а слева, или справа * поместить вертикальную ось, градуированную в долях для удобства чтения диаграммы. Столбики обозначаются буквами или рангами, как на рис. 1.3.2, *а*. Круговая (или секторная) диаграмма изображена на рис. 1.3.2, *б*. Ее преимуществом является компактность, но при большом количестве событий в системе (практически больше пяти) это преимущество становится недостатком. Столбиковые диаграммы легко располагать друг под другом, для того чтобы наглядно представить изменение вероятностного «веса» изучаемых событий под влиянием какого-либо контролируемого условия.

Пример 1.3.8. Известно, что младшие школьники предпочитают более сложные и трудные задания более легким. Степень предпочтения увеличивается при переходе от первого класса к четвертому; это показано в табл. 1.3.10. ** Изобразим изменения степени предпочтения в выборе трудной задачи школьниками первого — четвертого классов в виде последовательности столбиковых диаграмм, как показано на рис. 1.3.3.

Таблица 1.3.10

Вероятности выбора трудной и легкой задачи младшими школьниками

Выбор задачи	Классы			
	I	II	III	IV
Трудной (событие A)	0,77	0,80	0,68	0,93
Легкой (событие $\bar{A}$)	0,23	0,20	0,32	0,07

* Если столбиков много, шкалу для отсчета вероятности помещают и слева, и справа. Часто вместо шкалы отсчета сверху над столбиками указывают значения вероятностей.

** См. Л. И. Божович. Личность и ее формирование в детском возрасте. «Просвещение», 1968, стр. 251.

1.3.3. Меры связи между классифицированными событиями

Зависимость (связь) * между случайными событиями, как указывалось, состоит в том, что появление одного из событий изменяет вероятность появления другого события. Иначе говоря, факт связи между случайными событиями состоит в совместном изменении меры возможности их появления — частоты, частости или вероятности. По наличию или отсутствию такого изменения и судят о наличии или отсутствии зависимости между событиями.

а

События	A	$\bar{A}$	P (B)
B	0,4	0,0	0,4
$\bar{B}$	0,0	0,6	0,6
P (A)	0,4	0,6	1,0

б

События	A	$\bar{A}$	P (B)
B	0,3	0,1	0,4
$\bar{B}$	0,1	0,5	0,6
P (A)	0,4	0,6	1,0

в

События	A	$\bar{A}$	P (B)
B	0,1	0,3	0,4
$\bar{B}$	0,5	0,1	0,6
P (A)	0,6	0,4	1,0

Рис.1.3.4. Сопряженность «классифицированных» событий.
а — максимально тесная положительная; *б* — положительная; *в* — отрицательная.

Связь по вероятностям не является однозначной. Поэтому, в отличие от детерминированных связей, связи между случайными явлениями вообще называются *вероятностными* (стохастическими) *связями*. *Стохастическую связь* между «классифицированными» событиями часто называют *сопряженностью*.

Сопряженность ** имеет три свойства: тесноту (степень, силу), направление и направленность. *Теснота* сопряженности — это основное свойство. Она тем больше, чем более неравновероятно совместное появление всех зависимых в совокупности событий. Если все события (или по крайней мере одна пара событий) в си-

---

* В литературе по теории вероятностей чаще используется термин «зависимость», а в литературе по статистике и ее приложениям — термин «связь». Здесь и дальше мы употребляем оба термина как синонимы.

** Используя лаконичный термин «сопряженность», мы везде будем иметь в виду более точное, но длинное выражение: «стохастическая связь между классифицированными событиями».

стеме равновероятны, то, как показано выше, сопряженность отсутствует («нулевая» теснота). Если вероятности некоторых событий в системе равны нулю, а других не равны, то теснота максимальна, и связь вероятностная превращается в детерминированную (рис. 1.3.4, *а*). Между этими крайними случаями располагается множество случаев сопряженности, теснота которой непрерывно изменяется от нуля до некоторой максимальной величины, количественное выражение которой может быть различно.

Направление сопряженности определяется характером распределения вероятностей совместного появления событий. Если вероятности совместного появления событий AB и $\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}$ больше, чем вероятности совместного появления событий $\overline{\mathrm{A}}$B и A$\overline{\mathrm{B}}$, то направление сопряженности называется положительным (рис. 1.3.4, *а* и *б*). Если, наоборот, вероятности совместного появления событий $\overline{\mathrm{A}}$B и A$\overline{\mathrm{B}}$ больше, чем вероятности появления событий AB и $\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}$, то направление считают отрицательным *. *Направленность* сопряженности, как указывалось при определении зависимых событий, характеризует видо-родовые отношения (включение) событий.

В качестве мер, количественно характеризующих тесноту сопряженности, используются четыре коэффициента. Два из них применимы только к альтернативному (четырехклеточному) распределению, назовем их коэффициентами четырехклеточной сопряженности. Два других применимы к любой $m \times n$-клеточной системе событий, назовем их коэффициентами $m \times n$-клеточной сопряженности. *Коэффициенты четырехклеточной сопряженности* вычисляются по следующим формулам:

$$Q = \frac{ad - cb}{ad + cb}, \qquad (1.3.26)$$

$$\Phi = \frac{ad - cb}{\sqrt{(a+b)(c+d)(b+d)(a+c)}}, \qquad (1.3.27)$$

где значения a, b, c, d и их сумм понятны из таблицы 1.3.11. Коэффициент Φ известен под названием коэффициента ассоциации (связи). Он оценивает сопряженность только в одном направлении, и вернее было бы назвать его коэффициентом односторонней сопряженности. Коэффициент Q известен под названием коэффициента сопряженности (контингенции). Он оценивает взаимную сопряженность, поэтому лучше называть его коэффициентом взаимной сопряженности. Оба коэффициента изменяются в пределах:

$$-1 \leqslant Q \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \Phi \leqslant 1.$$

---

* Такое определение направлений обусловлено, как показано ниже, знаком количественных мер сопряженности.

Таблица 1.3.11

Четырехклеточное (альтернативное) распределение

События	A	$\bar{A}$	Частоты или частости событий B
B	a	b	$a+b$
$\bar{B}$	c	d	$c+d$
Частоты или частости событий A	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

Пример 1.3.9а. По данным эксперимента, рассмотренного в примере 1.3.2, определим тесноту и направление сопряженности между отклонением влево и вправо от вертикали и действиями левой или правой рукой. Согласно табл. 1.3.2 и 1.3.11: $a = 12$, $b = 84$, $c = 91$, $d = 18$. Вычислим по формулам (1.3.26) и (1.3.27):

$$Q = \frac{12 \cdot 18 - 91 \cdot 84}{12 \cdot 18 + 91 \cdot 84} = \frac{216 - 7644}{216 + 7644} = -\frac{7428}{7860} = -0{,}94,$$

$$\Phi = \frac{216 - 7644}{\sqrt{96 \cdot 109 \cdot 102 \cdot 103}} = -\frac{7428}{10\,500} = -0{,}71.$$

Сопоставив полученные значения Q и Φ, можно видеть, что коэффициент Φ дает более осторожную оценку сопряженности, чем коэффициент Q.

Связь между значениями Q и Φ и совместным распределением вероятностей событий иллюстрирует табл. 1.3.12. Неодинаковая чувствительность Q и Φ к форме совместного и безусловных распределений (табл. 1.3.12) позволяет рекомендовать к использованию коэффициент Q тогда, когда частоты концентрируются преимущественно в трех клетках таблицы, а коэффициент Φ использовать во всех остальных случаях.

Таблица 1.3.12

К сопоставлению коэффициентов ассоциации и контингенции

(с сокращениями заимствована из сб. Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации. «Наука», М., 1968, стр. 238)

а

	A	$\bar{A}$	f (B)
B	15	5	20
$\bar{B}$	35	45	80
f (A)	50	50	100

$Q = 0{,}59$; $\Phi = 0{,}25$

б

	A	$\bar{A}$	f (B)
B	19	1	20
$\bar{B}$	31	49	80
f (A)	50	50	100

$Q = 0{,}94$; $\Phi = 0{,}45$

в

	A	$\bar{A}$	f (B)
B	20	0	20
$\bar{B}$	30	50	80
f (A)	50	50	100

$Q = 1{,}00$; $\Phi = 0{,}50$

Коэффициенты $m \times n$-клеточной сопряженности вычисляются по следующим формулам:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} \quad \text{или} \quad C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}}, \qquad (1.3.28)$$

где $\varphi^2 = \chi^2 : n$.

$$K = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\chi^2}{N\sqrt{(m-1)(n-1)}}} & \text{при } m \neq n, \\ \sqrt{\dfrac{\chi^2}{N(n-1)}} & \text{при } m = n. \end{cases} \qquad (1.3.29)$$

Коэффициент C предложен К. Пирсоном и часто называется коэффициентом взаимной сопряженности Пирсона. Коэффициент K предложен А. А. Чупровым и часто называется коэффициентом взаимной сопряженности Чупрова. В оба коэффициента входит величина χ^2, имеющая в статистике большое значение. Мы будем рассматривать χ^2 подробно в главе 5, а здесь познакомимся с ее вычислением:

$$\chi^2 = \sum_j \sum_i \frac{(f_{ij} - f_{ij}^*)^2}{f_{ij}^*}, \qquad (1.3.30)$$

где f_{ij} — наблюдаемая в опыте частота, f_{ij}^* — теоретически ожидаемая частота.

Если вместо частот применять вероятности, то формула (1.3.30) перепишется следующим образом:

$$\chi^2 = n \sum_j \sum_i \frac{(p_{ij} - p_{ij}^*)^2}{p_{ij}^*}, \qquad (1.3.31)$$

где $n = \sum_j \sum_i f_{ij}$ — объем выборки. Рассмотрим вычисление χ^2 и коэффициентов C и K на примере.

Пример 1.3.9б. По данным наблюдения определить, имеется ли у людей сопряженность между цветом волос и цветом глаз. В табл. 1.3.13 приведены частоты совместного распределения трех градаций цвета глаз и четырех градаций цвета волос, а также безусловные распределения. * В каждой клетке, соответствующей совместному появлению событий A_jB_i, записаны три числа: первое (сверху) — эмпирическая частота f_{ij}, второе (в середине) — ожидаемая частота f_{ij}^*, третье — разность: $f_{ij} - f_{ij}^*$ (см. формулу 1.3.30).

Ожидаемая частота f_{ij}^* определяется из условия независимости событий (1.3.6), по которому частота совместного появления

---

* По кн. В. Ю. Урбаха «Биометрические методы», стр. 357 («Наука», М., 1964).

Таблица 1.3.13

Данные к примеру 1.3.9б

		Цвет волос				$f(A_j)$
		Светлый B_1	Русый B_2	Черный B_3	Рыжий B_4	
Цвет глаз	голубой A_1	177 117 60	71 96 −25	17 47 −30	14 19 −5	279
	серый A_2	95 131 −36	119 108 11	75 53 22	25 22 3	314
	карий A_3	12 36 −24	44 30 14	23 15 8	8 6 2	87
$f(B_i)$		284	234	115	47	680

независимых событий равна произведению безусловных частот, деленному на общее число наблюдений:

$$f_{ij}^* = \frac{1}{n} f(A_j) \cdot f(B_i), \tag{1.3.32}$$

где $n = \sum_i f(A_j) = \sum_j f(B_i)$ — общее количество наблюдений; $f(A_j)$ и $f(B_i)$ — понятны из табл. 1.3.13. Используя значения разностей $(f_{ij} - f_{ij}^*)$ в табл. 1.3.13, определим слагаемые в формуле для χ^2, а затем и χ^2:

$$\begin{array}{ll}
60^2 : 117 = 30{,}8 & 22^2 : 53 = 9{,}1 \\
36^2 : 131 = \ \ 9{,}9 & 8^2 : 15 = 4{,}3 \\
24^2 : \ \ 36 = 16{,}0 & 5^2 : 19 = 1{,}3 \\
25^2 : \ \ 96 = \ \ 6{,}5 & 3^2 : 22 = 0{,}4 \\
11^2 : 108 = \ \ 1{,}1 & 2^2 : \ \ 6 = 0{,}7 \\
14^2 : \ \ 30 = \ \ 6{,}5 & \rule{3cm}{0.4pt} \\
30^2 : \ \ 47 = 19{,}2 & \chi^2 = 105{,}8 \approx 106.
\end{array}$$

По одной из формул (1.3.28) определим коэффициент взаимной сопряженности Пирсона: $C = \sqrt{106 : (106 + 680)} \approx 0{,}37$. Коэффициент Чупрова дает несколько меньшую величину: $K = \sqrt{106 : 680 \cdot \sqrt{2 \cdot 2}} \approx 0{,}25$. Правила использования коэффициентов C и K сводятся, во-первых, к правилам применения χ^2 (см. стр. 300) и, во-вторых, к следующему. Считается, что коэф-

фициент Чупрова менее чувствителен к количеству событий $m \times n$, чем коэффициент Пирсона, поэтому при малых значениях m и n лучше применять коэффициент K (Чупрова). В заключение отметим, что оба коэффициента изменяются только от нуля до единицы и измеряют тесноту сопряженности, не указывая ее направления. О нем легко судить по форме совместного распределения вероятностей (частот) событий.

1.3.4. Последовательность событий

Пусть в каждом из n последовательных испытаний может появиться одно из s несовместных событий A_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, s$; $k = 1, 2, \ldots, n$), образующих полную группу. Пусть P_{ik} — это вероятность появления события A_{ik}. Тогда в результате k испытаний реализуется некоторая последовательность событий:

$$A_{i1},\ A_{i2},\ \ldots,\ A_{ik-1},\ A_{ik}. \tag{1.3.34}$$

Если испытания независимые, то появление каждого i-того события не зависит от его места в последовательности и определяется только безусловной вероятностью P_i. В этом случае события независимы в последовательности, * и такую последовательность событий называют последовательностью Бернулли.

Если испытания зависимые, то появление каждого i-того события зависит от того, какие события появились до него, т. е. зависит от места в последовательности. В этом случае события являются зависимыми в последовательности. Такая последовательность называется цепью Маркова. Различают простые и сложные, однородные и неоднородные цепи Маркова. Если для каждого из событий условная вероятность появиться в $k + 1$-м испытании зависит от того, какое событие появилось в k-том испытании и не зависит от информации о событиях, наступивших во всех предыдущих $k - 1$ испытаниях, то последовательность событий (1.3.34) называется *простой* цепью Маркова: события в простой цепи Маркова зависят в последовательности только попарно. Если условная вероятность появиться в $k + 1$-м испытании зависит от того, какие события появились в двух или более предшествующих испытаниях, то последовательность событий (1.3.34) называется *сложной* цепью Маркова; в ней события зависят в последовательности по два, по три и вообще — по h, где $2 \leqslant h \leqslant n$. Если в реализации последовательности величина h не изменяется, то цепь Маркова является однородной. Простая цепь по определению всегда однородна. Если h переменно, то сложная цепь Маркова является неоднородной.

Обычно цепям Маркова дают следующую «физическую» интерпретацию. Некоторая система (биологическая, экономическая,

---

* Отметим, что, будучи в указанном смысле независимыми в последовательности, несовместные события зависимы в совокупности (в полной группе).

социальная, психическая и т. п.) может находиться в s состояниях: A_1, A_2, ..., A_s, несовместных и образующих полную группу. В некоторые (случайные или определенные) моменты времени t_k или при некоторых условиях Ω_k система переходит из состояния i в состояние j ($i = 1, 2, ..., s$; $j = 1, 2, ..., s$) с некоторой условной вероятностью $P_{ij} = P\,(A_j/\prod_h A_h)$, причем, как определено выше, при $h = 1$, последовательность состояний системы описывается простой (однородной) цепью Маркова, а при $h \geqslant 2$ — сложной, однородной или неоднородной. Количество зависимых в последовательности событий h называют «памятью» системы. В этой связи системы, для которых динамика состояний описывается простой цепью Маркова, обычно называют «системами без памяти». В случае описания системы сложной цепью Маркова говорят о системе с памятью; чем больше h, тем лучше память. Легко понять, что для многих объектов психологии человека и животных можно применять только сложные, в том числе неоднородные (из-за флуктуаций памяти) цепи Маркова. Но это не означает, что в психологии совсем лишено смысла применение сравнительно более разработанного аппарата простых цепей. Оно вполне оправдано для первоначальных моделей динамики состояний (и других событий) во всех отраслях психологической науки.

Итак, под цепью Маркова будем понимать систему случайных событий A_i ($i = 1, 2, ..., s$) вместе с соответствующими им вероятностями перейти из i-того состояния в j-тое; эти вероятности называются *переходными вероятностями* (P_{ij}). Для каждого k-того перехода («шага») совокупность вероятностей P_{ij} образует *матрицу* * *переходных вероятностей* (матрицу перехода, переходную матрицу):

$$A_k = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \qquad (1.3.35)$$

В матрице (1.3.35) элементы P_{ii} — это вероятности в k-том испытании появиться снова тому же событию, что и в $k - 1$-м испытании, т. е. система останется в предыдущем состоянии. Остальные элементы читаются, согласно обозначениям: первая цифра индексации (i) — это номер исходного состояния (события), вторая (j) — это номер состояния (события), в которое переходит система. Например, P_{12} — вероятность перейти из состояния 1 в состояние 2. Легко видеть, что по строкам матрицы (1.3.35) располагаются вероятности перейти на втором «шаге» из данного (i-того) состояния во все другие или остаться в прежнем состоянии: в первой строке — вероятности перейти из 1-го состояния в 1-е, 2-е и 3-е; во второй строке — перейти из 2-го состояния в 1-е, 2-е и 3-е и т. д. По столбцам обозначены состояния j, в кото-

* Необходимые сведения о матрицах и действиях с ними даны в Приложении 1.

рые переходит система. Порядок переходной матрицы определяется количеством событий s, образующих полную группу. Одно из них обязательно происходит при k-том испытании, так что в каждой строке должно выполняться равенство:

$$\sum_{j=1}^{s} P_{ij} = 1.$$

Простая цепь Маркова полностью определяется матрицей одного перехода. Если известна матрица переходов для системы событий в одном испытании, то можно определить вероятность того, что через k испытаний появится интересующее нас событие. Для этого используется следующая формула (равенство Маркова):

$$P_{ij}(k) = \sum_{l} P_{il}(m) P_{lj}(k-m), \quad (1.3.36)$$

где k и m — натуральные числа: $1 \leqslant m \leqslant k$; $P_{il}(m)$ — вероятность перейти из i-того состояния в l-ное состояние за m «шагов», $P_{lj}(k-m)$ — вероятность из l-ного состояния перейти в j-тое за оставшиеся $k-m$ «шагов».

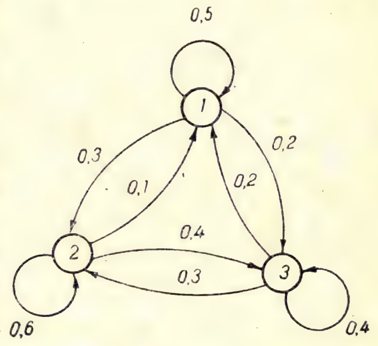


Рис. 1.3.5. Ориентированный граф, изображающий простую цепь Маркова с тремя состояниями.

Поясним равенство (1.3.36), геометрически интерпретируя цепь Маркова в виде *ориентированного графа* (рис. 1.3.5), вершины которого обозначают состояния (или события), а дуги (стрелки) — переходы из состояния в состояние (или импликацию событий). Каждая дуга такого графа реализуется на k-том шаге с вероятностью P_{ij}, так что матрицу переходных вероятностей (1.3.35) можно рассматривать как *матрицу смежности вершин графа* *. Пусть заданы численные вероятности перехода в матрице (1.3.35), которые подписаны над дугами графа (рис. 1.3.5). Допустим, требуется определить вероятность перейти из первого в третье состояние за два шага, считая, что цепь простая. Полная группа возможных переходов следующая (см. рис. 1.3.5): 1) на первом шаге остаться в первом состоянии с вероятностью P_{11} и на втором шаге перейти в третье состояние с вероятностью P_{13}; 2) на первом шаге перейти из первого во второе состояние с вероятностью P_{12} и на втором шаге перейти в третье состояние с вероятностью P_{23}; 3) на первом же шаге перейти из первого в третье состояние с вероятностью P_{13} и остаться в нем на втором шаге

* А. А. Зыков. Теория конечных графов. «Наука», СО, Новосибирск, 1969.

с вероятностью P_{33}. Так как каждый из альтернативных переходов — это произведение совместных зависимых событий, а их совокупность — сумма несовместных событий, то искомая вероятность определяется по формуле полной вероятности (1.3.16):

$$P_{13}(2) = P_{11} \cdot P_{13} + P_{12} \cdot P_{23} + P_{13} \cdot P_{33} = 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,3 + \\ + 0,2 \cdot 0,4 = 0,27.$$

Аналогично рассуждая, по графу на рис. 1.3.5 можем определить вероятность за три шага перейти из первого состояния в третье:

$$P_{13}(3) = P_{11} \cdot P_{11} \cdot P_{13} + P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{13} + P_{13} \cdot P_{31} \cdot P_{13} + P_{11} \cdot P_{12} \cdot P_{23} + \\ + P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{23} + P_{13} \cdot P_{32} \cdot P_{23} + P_{11} \cdot P_{13} \cdot P_{33} + P_{12} \cdot P_{23} \cdot P_{33} + \\ + P_{13} \cdot P_{33} \cdot P_{33} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + \\ + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + \\ + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,295.$$

На основе равенства (1.3.36) Марков доказал, что матрица переходов на k-том «шаге» (A_k) равна k-той степени матрицы переходов на первом «шаге»:

$$A_k = (A_1)^k \tag{1.3.37}$$

Этим уравнением и следует пользоваться для определения $P_{ij}(k)$.

Пример 1.3.10 *. Совокупность рабочих семей разделена на три подгруппы: 1) семьи, не имеющие телевизора и не намеренные его купить; 2) семьи, не имеющие телевизора, но собирающиеся его купить; 3) семьи, имеющие телевизор. Статистическое обследование позволило оценить вероятности перехода семьи из одной группы в другую на протяжении года и считать приемлемой модель простой марковской цепи. Пусть матрица переходных вероятностей оказалась следующей:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix},$$

где 1-я строка и 1-й столбец соответствуют первой подгруппе рабочих семей, 2-е строка и столбец — второй подгруппе, а 3-и строка и столбец — третьей подгруппе. Определим, какова вероятность того, что в течение двух лет рабочие семьи приобретут телевизор. Эта вероятность, очевидно, суммируется из вероятностей для рабочих семей из первой и второй подгрупп перейти в тече-

---

* Заимствован в кн.: З. Павловский. Введение в математическую статистику. «Статистика», М., 1967, стр. 271. Числа в примере вымышленные, но правдоподобные.

ние первого и второго года в третью подгруппу. Чтобы найти эти вероятности, воспользуемся уравнением (1.3.37) и определим матрицу:

$$A_2 = A_1^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,64 & 0,15 & \underline{0,21} \\ 0 & 0,49 & \underline{0,51} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где искомая вероятность будет равна сумме подчеркнутых условных вероятностей в матрице A_2: $P = 0,21 + 0,51 = 0,72$.

Для сложных цепей Маркова равенства (1.3.36) и (1.3.37) не выполняются. Поэтому сложная цепь Маркова в общем случае описывается вектором вероятностей начальных состояний и таким количеством матриц переходных вероятностей, сколько «шагов» системы рассматривается, — по одной на каждый «шаг». Обычно заранее не известно, простой или сложной цепью Маркова можно описать изучаемую систему. Чтобы выяснить это, необходимо экспериментально определить несколько матриц последовательных переходов, затем по уравнению (1.3.37) вычислить, пользуясь первой переходной матрицей, k-тую матрицу перехода и проверить, соответствует ли фактическая (экспериментальная) матрица k-того перехода, вычисленной на основе предположения о том, что цепь Маркова простая *. Если соответствия нет, то простая марковская цепь неприменима; если соответствие есть, то изучаемую систему можно описывать простой цепью Маркова.

Пример 1.3.11. В экспериментах по обучению свободному воспроизведению слов установлено, что испытуемые при первом прослушивании воспроизводят правильно из тридцати двух слов 9, при втором прослушивании 17, при третьем — 20, при четвертом — 22 и при пятом — 26 слов. ** Требуется определить, зависит ли вероятность правильного воспроизведения (и, следовательно, запоминания) слов при k-том прослушивании только от их незапоминания при предыдущем прослушивании. Иначе говоря, требуется определить, можно ли процесс запоминания группы слов, предъявляемой человеку несколько раз со случайным порядком слов в каждом предъявлении, моделировать простой цепью Маркова. На основе приведенных данных определим матрицы переходных вероятностей, пользуясь следующей формой:

$$A_k = \begin{bmatrix} P_k(\overline{A}) & P_k(A) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

---

* Проверка соответствия осуществляется по критерию χ^2 (см. стр. 301).

** Использованы данные, приводимые Р. Бушем и Ф. Мостеллером. См. Р. Буш, Ф. Мостеллер. Стохастические модели обучаемости. М., 1962, табл. 10.2, стр. 289.

где $P_k(\bar{A})$ — вероятность незапоминания слов и $P_k(A)$ — вероятность запоминания слов при k-том прослушивании. Обе вероятности расположены в первой строке, соответствующей исходному состоянию незапоминания. Вторая строка матрицы соответствует исходному состоянию запоминания, от которого можно перейти к состоянию незапоминания (забывание) или остаться в состоянии запоминания (сохранение). Так как в опытах по свободному воспроизведению слов нельзя объективно контролировать процессы забывания и сохранения запомненного материала, то предполагается, что забывание отсутствует и сохранение полное. Поэтому вероятность забывания положена равной нулю, а вероятность сохранения запомненного — равной единице. Вычислив вероятности $P_k(\bar{A})$ и $P_k(A)$, получаем матрицы для пяти прослушиваний:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,47 & 0,53 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_2^* = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,62 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_3^* = \begin{bmatrix} 0,37 & 0,63 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0,31 & 0,69 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_4^* = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,73 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0,19 & 0,81 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_5^* = \begin{bmatrix} 0,19 & 0,81 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предположив, что имеет место простая цепь Маркова, по уравнению (1.3.37) вычислим ожидаемые значения матриц A_k^* при $k = 2, 3, 4, 5$, приняв в качестве исходной матрицу A_1. Результаты, приведенные справа от матриц, определенных из опыта, наглядно свидетельствуют о возможности применить простую цепь Маркова в данном случае.

§ 1.4 КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ СОБЫТИЙ

1.4.1. Ранжирование событий по величине

Если некоторое психическое явление обладает свойством, более или менее выраженным в конкретных условиях (например, у разных людей, в различных жизненных ситуациях и т. п.), то, пользуясь специальными экспериментальными приемами *, можно

* Эти приемы, разработанные в психологии, рассматриваются в литературе. См., например, М. Решлен. Измерение в психологии. В сб. Экспериментальная психология. Под ред. П. Фресса и Ж. Пиаже. М., 1966. Б. Ф. Грин. Измерение установки. В сб. Математические методы в современной буржуазной социологии. Под ред. Г. В. Осипова. М., 1966

упорядочить проявления данного свойства по степени выраженности — *по величине*. Тогда проявление некоторой величины интересующего нас свойства может рассматриваться как событие и притом — случайное событие. А множество таких событий, образующее полную группу относительно области проявления рассматриваемого свойства (от минимума до максимума), составляет *систему упорядоченных событий*.

Система упорядоченных событий отличается от рассмотренных в предыдущем изложении тем, что может быть геометрически изображена на оси, как показано на рис. 1.4.1. Однако упорядочивание только на основе оценок «больше — меньше» не дает еще никакой числовой определенности. Числовая определенность

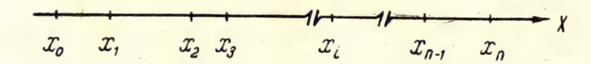


Рис. 1.4.1. Система упорядоченных событий.
X — изучаемое свойство; x_i — его проявление; $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$, причем $x_{i+1} > x_i$ при всех i.

достигается ранжированием, т. е. приписыванием баллов (или рангов) y_i событиям x_i. В качестве баллов используются 0 и числа натурального ряда 1, 2, 3 и т. д., причем не только положительные, но и отрицательные. * При ранжировании заменяют неизвестные и обычно неравные интервалы между значениями упорядоченной переменной X равными интервалами $\lambda = y_{i+1} - y_i$ между баллами Y, как это показано на рис. 1.4.2. Очевидно, что такое «уравнивание» интервалов семантически фиктивно. Но формально это допустимое приближение, так как математически ранжирование эквивалентно линеаризации: нелинейные приращения Δx_i переменной X заменяются линейными приращениями Δy_i переменной Y.

Часто упорядоченная переменная выражается через *сумму баллов*, «набираемых» испытуемым в результате выполнения группы заданий, посредством которых выявляется латентная переменная (см. § 7.1). Причем, если каждое задание оценивается по двух-, трех-, пяти- и вообще k-бальной шкале, то сумма баллов Y может принимать значения в пределах:

$$0 \leqslant Y \leqslant km, \tag{1.4.1}$$

где k — максимально возможное количество баллов в шкале; m — количество заданий в группе. В этой ситуации, типичной для большинства отраслей психологии, изучающих объекты более сложные, чем явления сенсомоторики, суммы баллов уже могут не образовывать равных интервалов в конкретном исходе опыта.

---

* Строго говоря, ранги всегда положительны. Отрицательные ранги — это центральные отклонения, результат центрирования ранжированной переменной (стр. 126).

Тогда формальное уравнивание интервалов достигается группировкой исходных сумм баллов в классы длинной λ, где λ обычно больше или равно 2.

Выбор классового интервала λ и определение границ переменной суммы баллов Y состоит в следующем. Пусть $y_{\min}$ — минимальное, а $y_{\max}$ — максимальное значения Y. Тогда

$$\lambda = ant\left\{\frac{y_{\max} - y_{\min}}{\Delta y}\right\}, \qquad (1.4.2)$$

где λ — *классовый интервал*, ant — обозначение ближайшей целой части, Δy — натуральное число, причем необходимо, чтобы $8 \leqslant \Delta y$; обычно принимают: $\Delta y = 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$ — и более, если позволяет количество наблюдений. Затем выбираются *границы классов* (y_i). Первая (нулевая) граница $y_1 \leqslant y_{\min}$, для того

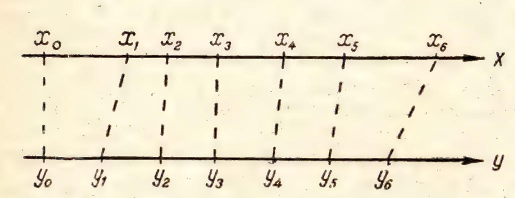


Рис. 1.4.2. Ранжирование системы упорядоченных событий. X — изучаемое свойство, x_i — его проявление; $x_{i+1} > x_i$ при всех i; $x_i - x_{i-1} \neq x_{i+1} - x_i$ по крайней мере для некоторых i; Y — баллы (ранги); y_i (при $i = 0, 1, 2, \ldots, 6$) — конкретные значения баллов; $y_i - y_{i-1} = y_{i+1} - y_i = \lambda$ для всех i.

чтобы $y_{\min}$ не оказался за пределами классификации. Аналогично требуется, чтобы граница последнего класса $y_{n+1} \geqslant y_{\max}$. Конкретные значения классовых границ, начиная со второй, определяются последовательно по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \lambda, \qquad (1.4.3)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n+1$. В результате переменная сумма баллов Y снова изображается в равных интервалах λ (но $\lambda \neq 1$) на числовой оси, как это показано на рис. 1.4.2.

Наряду с границами классов при группировке данных (стр. 106) используются *средние значения классов*. Эти значения — обозначим их w_i — определяются, если выбраны границы классов * y_i, по уравнению

$$w_i = y_i + 0{,}5 \cdot \lambda, \qquad (1.4.4)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n+1$ для y и $i = 1, 2, \ldots, n$ для w_i.

1.4.2. **Распределение вероятностей ранжированной системы упорядоченных событий**

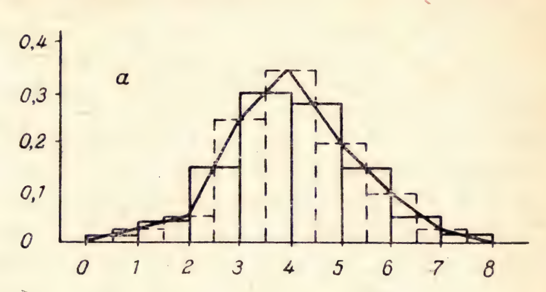
Каждому значению балла y_i (или w_i) как случайному событию соответствует вероятность (частота, частость) его появления. Пусть на оси абсцисс отложены значения баллов $y_{i+1} > y_i$ (для

---

* Во многих случаях сначала выбирают w_i, например тогда, когда «0» баллов желательно сделать началом отсчета. Тогда границы определяют, исходя из средних значений интервалов: $y_i = w_i - 0{,}5\lambda$ и $y_{i+1} = w_i + 0{,}5\,\lambda$.

$i = 1, 2, \ldots, n+1$), тогда каждому интервалу значений переменной суммы баллов Y соответствует вероятность $P(y_i \leqslant Y \leqslant y_{i+1})$, которая геометрически может быть представлена площадью прямоугольника с основанием λ и высотой $f(Y)$:

$$P(y_i \leqslant Y \leqslant y_{i+1}) = f(Y)\lambda. \qquad (1.4.5)$$



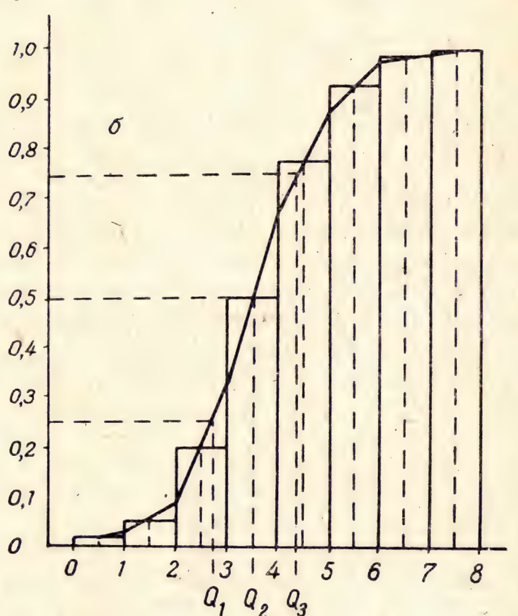


Рис. 1.4.3. Полигон (*а*) и кумулята (*б*), а также соответствующие им гистограммы распределения вероятностей ранжированной системы упорядоченных событий.

По оси абсцисс — баллы Y; по оси ординат — вероятности (так как $\lambda = 1$): *а* — вероятность $P(y_i < Y \leqslant y_{i+1})$; *б* — вероятность $P(Y \leqslant y_i)$. Пунктиром отмечены вероятности $P(y_i \leqslant Y \leqslant y_{i+1})$, соответствующие средним значениям интервалов (w_i). Q_1, Q_2, Q_3 — первый, второй и третий квартили.

Фигура, образованная такими прямоугольниками, расположенными вплотную друг к другу на плоскости, называется *гистограммой* распределения вероятностей (частостей, частот) ранжированной системы упорядоченных событий. Гистограмма при $\lambda = 1$ изображена на рис. 1.4.3. На основании выполнения неравенства $y_{i+1} > y_i$ значения баллов y_i при любых i на оси абсцисс фиксированы не произвольно, как это имело место для системы классифицированных событий. Поэтому в отличие от диаграмм распределения, рассмотренных выше, гистограмма распределения

имеет конфигурацию, зависящую от ординат $f(Y)$ и классового интервала λ, но не допускающую перестановок «столбиков» на оси абсцисс.

В отличие от системы классифицированных событий система упорядоченных событий характеризуется тем, что изучаемое свойство X — это по существу непрерывная латентная переменная, которая лишь в силу обстоятельств представлена в виде ряда дискретных значений *. Поэтому следует ожидать, что и вероятности значений x_i, переменной X должны изменяться непрерывно, а не «скачками» как на гистограмме. В этой связи более удобной плоской фигурой для геометрического изображения вероятности появления баллов на интервале λ является прямоугольная трапеция, равновеликая прямоугольнику гистограммы (см. рис. 1.4.3). Обозначив ординаты сторон такой трапеции как $f(y_i)$ и $f(y_{i+1})$, где y_i и y_{i+1} — абсциссы интервала λ, очевидно получим площадь трапеции, изображающую вероятность:

$$P(y_i \leqslant Y \leqslant y_{i+1}) = 0{,}5\,[f(y_i) + f(y_{i+1})]\,\lambda, \tag{1.4.6}$$

где $P(y_i \leqslant Y \leqslant y_{i+1})$ — вероятность появления баллов на интервале λ.

Фигура, образованная трапециями по (1.4.6), расположенными вплотную друг к другу на плоскости Y, $f(y)$, называется *полигоном* или многоугольником распределения (рис. 1.4.3, *а*). Полигон распределения более точно выражает изменение вероятностей значений упорядоченной непрерывной переменной, чем гистограмма. Но в результате группировки экспериментальных данных обычно получают сначала гистограмму. Если известен полигон, то легко определить ординаты гистограммы по уравнению

$$f(w_i) = 0{,}5\,[f(y_i) + f(y_{i+1})], \tag{1.4.7}$$

где $f(w_i)$ — ординаты средних значений интервалов, а $f(y_i)$ и $f(y_{i+1})$ — ординаты границ классов, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ для y_i и $i = 1, 2, \ldots, n$ для w_i.

От гистограммы к полигону можно перейти двумя способами. Первый способ состоит в том, что средние значения интервалов отождествляют с новыми границами ($w_i \equiv y_i$), сдвигая тем самым все основание ряда влево на $0{,}5\lambda$. Это допустимо потому, что, в сущности, безразлично, принять ли i-тую точку на оси абсцисс за границу y_i или за среднее значение w_i i-того интервала. Таким образом, соединяя все y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$ — по числу w_i) отрезками прямых, образуют большую часть полигона, площадь которого, однако, остается меньше единицы до тех пор, пока не будут выбраны новые «левая» и «правая» границы (y_1 и y_{n+1}). Эти гра-

---

* Непрерывной называется переменная, принимающая на бесконечно малом интервале бесконечно большое число значений. Дискретная переменная на конечном интервале имеет конечное число значений.

ницы определяются по уравнению (1.4.3): $y_1 = y_2 - \lambda$ и $y_{n+1} = y_n + \lambda$. Ординаты $f(y_1)$ и $f(y_{n+1})$ этих границ чаще всего неизвестны. Но для большинства распределений, у которых вероятности границ равны нулю или асимптотически к нему стремятся, принимается $f(y_1) = f(y_{n+1}) = 0$. Второй способ получения полигона из гистограммы основан на формуле (1.4.7), преобразуя которую, получаем уравнение

$$f(y_{i+1}) = f(y_i) + 2[f(w_i) - f(y_i)], \qquad (1.4.8)$$

где обозначения те же, что и в (1.4.7), $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ и $f(y_1) = f(y_{n+1}) = 0$. При этом границы y_i отличаются от первоначальных сдвигом влево на 0,5 λ (см. рис. 1.4.3, *а*). Если $\lambda = 1$, то ординаты $f(y_i)$ и $f(w_i)$, как следует из (1.4.5) и (1.4.6), тождественно равны соответствующим вероятностям $P(y_i)$ и $P(w_i)$. Так, например, ординатам полигона и гистограмм на рис. 1.4.3, *а* соответствуют оценки вероятностей, приведенные в табл. 1.4.1. Так как значения y_i образуют полную группу событий, то сумма вероятностей для полигона и для гистограммы равна единице:

$$\sum_i P(y_i \leqslant Y \leqslant y_{i+1}) = 1. \qquad (1.4.9)$$

Иначе говоря, площадь, занимаемая полигоном или гистограммой, приравнивается единице (см. табл. 1.4.1).

Таблица 1.4.1

Количественные данные к рис. 1.4.3, *а*

Полигон		Гистограмма	
y_i	$p(y_i)$	w_i	$p(w_i)$
1	0,000	0,5	0,0125
2	0,025	1,5	0,0375
3	0,050	2,5	0,1500
4	0,250	3,5	0,3000
5	0,350	4,5	0,2750
6	0,200	5,5	0,1500
7	0,100	6,5	0,0625
8	0,025	7,5	0,0125
9	0,000	—	—
$\sum_i$	1,000	$\sum_i$	1,0000

Наряду с вероятностью появления значений на фиксированном интервале λ имеет большое значение вероятность того, что ранжированная переменная не превзойдет одного из возможных значений:

$$P(Y \leqslant y_i) = \sum_{y_{\min}}^{y_i} P(y_i \leqslant Y \leqslant y_{i+1}) \qquad (1.4.10)$$

при $y_{\min} \leqslant y_i \leqslant y_{\max}$, $0 \leqslant P\,(Y \leqslant y_i) \leqslant 1$. Сопоставляя уравнение (1.4.10) с уравнениями (1.4.5) и (1.4.6), легко видеть, что

$$P\,(Y \leqslant y_i) = \lambda \cdot \sum_{w_i} f\,(w_i) \text{ или } P\,(Y \leqslant y_i - 0{,}5\lambda) = \lambda \cdot \sum_{y_i} f\,(y_i), \qquad (1.4.11)$$

где $\sum\limits_{w_i} f\,(w_i)$ — «накопленные» ординаты средних значений интервалов, а $\sum\limits_{y_i} f\,(y_i)$ — «накопленные» ординаты границ интервалов. Фигура, образованная прямоугольниками с основаниями λ и высотами $\sum\limits_{w_i} f\,(w_i)$ — это *кумулятивная гистограмма*; она изображена на рис. 1.4.3, *б* .

Фигура, образованная прямоугольными трапециями, опирающимися на интервалы λ и имеющими в качестве оснований ординаты $\sum\limits_{y_i} f\,(y_i)$ и $\sum\limits_{y_{i+1}} f\,(y_{i+1})$, называется *кумулятивным полигоном* или *кумулятой* (рис. 1.4.3, *б*). Переход от ординат кумуляты к ординатам кумулятивной гистограммы достигается по уравнению

$$\sum_{w_i} f\,(w_i) = 0{,}5\left[\sum_{y_i} f\,(y_i) + \sum_{y_{i+1}} f\,(y_{i+1})\right] \qquad (1.4.12)$$

и обратный переход (при $f\,(y_i) = 0$) — по уравнению

$$\sum_{y_{i+1}} f\,(y_{i+1}) = \sum_{y_i} f\,(y_i) + 2\left[\sum_{w_i} f\,(w_i) - \sum_{y_i} f\,(y_i)\right]. \qquad (1.4.13)$$

При $\lambda = 1$, как это следует из (1.4.11), все суммы заменяются соответствующими вероятностями. В частности, для рис. 1.4.3, *б*, они приведены в табл. 1.4.2.

Таблица 1.4.2

Количественные данные к рисунку 1.4.3, *б*

Кумулята		Кумулятивная гистограмма	
y_i	$p\,(y_i)$	w_i	$p\,(w_i)$
1	0,000	0,5	0,0000
2	0,025	1,5	0,0125
3	0,075	2,5	0,2000
4	0,325	3,5	0,5000
5	0,675	4,5	0,7750
6	0,875	5,5	0,9250
7	0,975	6,5	0,9875
8	1,000	7,5	1,0000

Итак, распределение вероятностей ранжированной системы упорядоченных событий может быть задано таблично и графически в двух основных формах: в виде полигона и в виде кумуляты, а также путем соответствующих гистограмм. Получение этих форм по эмпирическим данным ниже будет рассмотрено на примере

Независимо от способа и формы задания, распределения вероятностей баллов Y упорядоченных переменных X различаются, во-первых, *положением* на числовой оси (рис. 1.4.4, *а*), во-вторых, *рассеиванием* значений переменной (рис. 1.4.4, *б*) и, в-третьих, *асимметрией* (косостью, скошенностью) рассеивания значений переменной (рис. 1.4.4, *в*). Эти три свойства как по отдельности,

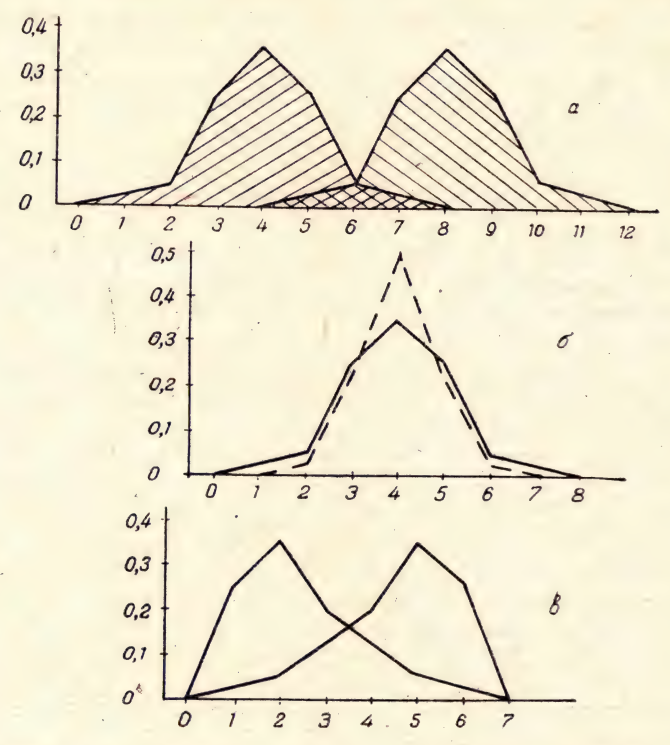


Рис. 1.4.4. Свойства законов распределения ранжированной переменной.

а — положение; *б* — рассеивание; *в* — асимметрия. По оси абсцисс — баллы, по оси ординат — вероятности.

так и в сочетаниях, обусловлены по степени выраженности спецификой упорядоченной переменной X, а также условиями, в которых она эмпирически изучалась. Поэтому количественно характеризуя степень проявления каждого из трех указанных свойств и пользуясь их количественными характеристиками, психолог получает возможность сравнивать психические явления у разных людей и в различных условиях. Иначе говоря, так как распределения вероятностей характеризуют конкретные упорядоченные психические переменные, то, сравнивая распределения, опосредованно сравнивают психические переменные.

1.4.3. **Количественные характеристики распределения вероятностей системы упорядоченных событий**

Количественные (числовые) характеристики свойств распределения вероятностей ранжированной переменной определяются на основе квантилей. *Квантилем* называется значение переменной, отделяющее от распределения «слева» или «справа» определенную долю объема совокупности. Если объем совокупности (площадь гистограммы, полигона или кумуляты) положен равным единице, то квантиль — это значение y_i переменной Y, для которого задана вероятность

$$P(Y \leqslant y_i) \text{ либо } P(Y \geqslant y_i) = 1 - P(y \leqslant y_i) \qquad (1.4.14)$$

Среди квантилей, имеющих огромное значение в математической статистике, обычно используются квартили, децили и центили. *Квартили* делят совокупность на четыре части, поэтому их всего три. *Децили* делят совокупность на десять частей, их девять. *Центили* отделяют от совокупности по 0,01 части; их 99.

Для распределений упорядоченной переменной используются преимущественно квартили. Именно через квартили определяются в этом случае числовые характеристики положения рассеивания и асимметрии. Первый квартиль Q_1 отделяет слева 0,25 объема совокупности. Второй квартиль Q_2 делит совокупность на две равных по объему части (по 0,5); этот квартиль называется медианой. Наконец, третий квартиль Q_3 отделяет слева 0,75 объема совокупности и справа 0,25 объема (см. рис. 1.4.3, *б*).

Вычисляются квартили по полигону или кумуляте, заданным графически или таблично. Если переменная X ранжирована по возрастанию ($x_{i+1} > x_i$, соответственно: $y_{i+1} > y_i$), то вычисления проводятся «слева — направо» по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= A(Q_1) + \lambda\left(\frac{n}{4} - S_A\right)\frac{1}{f(Q_1)}, \\ Q_2 &= A(Q_2) + \lambda\left(\frac{n}{2} - S_A\right)\frac{1}{f(Q_2)}, \\ Q_3 &= A(Q_3) + \lambda\left(\frac{3n}{4} - S_A\right)\frac{1}{f(Q_3)}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.15)$$

где Q_i — i-тый квартиль, $A(Q_i)$ — начало классового интервала, в котором находится i-тый квартиль; λ — классовый интервал; n — объем совокупности в частотах, $n = 1$, если используются частости или вероятности; S_A — сумма частот (частостей, вероятностей) классов, предшествующих тому, где находится i-тый квартиль ($S_A = P[Y \leqslant A(Q_i)]$); $f(Q_i)$ — частота (частость, вероятность), соответствующая классу, где находится i-тый квартиль.

Если переменная X ранжирована по убыванию ($x_{i+1} < x_i$, но $y_{i+1} > y_i$), то вычисления проводятся «справа — налево» по формулам:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= B(Q_1) - \lambda\left(\frac{3n}{4} - S_B\right)\frac{1}{f(Q_1)}, \\ Q_2 &= B(Q_2) - \lambda\left(\frac{n}{2} - S_B\right)\frac{1}{f(Q_2)}\Bigg), \\ Q_3 &= B(Q_3) - \lambda\left(\frac{n}{4} - S_B\right)\frac{1}{f(Q_3)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.4.16}$$

где $B(Q_i)$ — «конец» класса, где находится i-тый квартиль; S_B — суммы частот (частостей, вероятностей) классов, следующих за классом, где находится i-тый квартиль; остальные обозначения те же, что и в формулах (1.4.15). *

Мерой положения распределения вероятностей ранжированной переменной является *медиана* ($\mathrm{Me} = Q_2$). Для симметричных распределений медиана совпадает с модой, для асимметричных — не совпадает. Медиану рассматривают как центр рассеивания значений ранжированной переменной.

Приближенной мерой рассеивания является *размах распределения*. Эта область существования (или экспериментального определения) ранжированной переменной. Очевидно, чем больше размах, тем больше и рассеивание значений относительно медианы. Однако при одном и том же размахе рассеивание значений может быть более или менее «кучным». «Чувствительной» мерой рассеивания является *полуинтерквартильное* (вероятное, срединное) *отклонение*. Оно определяется как половина интервала рассеивания, включающего медиану, которому соответствует половина объема совокупности, т. е.

$$E = 0{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1), \tag{1.4.17}$$

где E — полуинтерквартильное отклонение; Q_3 и Q_1 — третий и первый квартили. Для симметричных распределений (рис. 1.4.4, *а* и *б*)

$$E = \mathrm{Me} - Q_1 = Q_3 - \mathrm{Me}, \tag{1.4.18}$$

но для асимметричных распределений (рис. 1.4.4, *в*):

$$\mathrm{Me} - Q_1 \neq Q_3 - \mathrm{Me}. \tag{1.4.19}$$

На этом и основана количественная оценка асимметрии распределения.

Мерой асимметрии является *квартильный коэффициент асимметрии*, который определяется по формуле

$$\mathrm{As}(Q) = \frac{1}{2E}(Q_1 + Q_3 - 2\mathrm{Me}), \tag{1.4.20}$$

---

* Отметим, что формулы (1.4.16) можно использовать для проверки вычислений по (1.4.15).

где As (Q) — квартильный коэффициент асимметрии;

$$-1 < \text{As}(Q) < 1.$$

Из уравнения (1.4.20) нетрудно установить, что для симметричных распределений As $(Q) = 0$, при скошенности влево (*1* на рис. 1.4.4, *в*) As $(Q) > 0$, а при скошенности вправо (*2* на рис. 1.4.4, *в*), наоборот, As $(Q) < 0$. Поэтому скошенность (асимметрию) влево называют *положительной*, а скошенность вправо — *отрицательной*.

Пример 1.4.1. По одному из субтестов батареи Векслера (отечественный вариант) на выборке в 100 испытуемых получены суммы баллов, приведенные в табл. 1.4.3. Осуществим группировку данных, определим полигон и кумуляту распределения (в частостях) и его числовые характеристики.

Таблица 1.4.3

Суммы баллов к примеру 1.4.1

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
15	20	14	13	10	9	24	17	11	16
12	15	16	5	15	15	7	9	25	23
20	16	14	17	21	15	10	19	22	25
18	16	10	20	24	11	15	15	17	15
10	11	22	22	22	19	17	20	14	11
14	12	24	16	9	23	13	11	18	17
18	23	22	19	23	26	19	14	22	19
17	21	21	18	16	20	21	15	23	16
15	24	18	14	18	12	20	16	15	20
22	23	16	15	14	5	20	22	20	22

Сначала определим классовый интервал по уравнению (1.4.2), пользуясь данными табл. 1.4.3:

$$y_{\min} = 5;\ y_{\max} = 26;\ \lambda = ant\left\{\frac{26-5}{10}\right\} = 2.$$

Найдем значения границ интервалов для группировки данных. Учитывая, что среди эмпирических значений отсутствуют значения 6 и 8, но имеются значения 5 и 7, выберем средние значения интервалов: $w_1 = 5$; $w_2 = 7$ и так далее по формуле (1.4.4). Тогда границы интервалов для группировки определятся по уравнению (1.4.3): $y_1 = 4$, $y_2 = 6$ и так далее, как указано в табл. 1.4.4. Существуют разные способы группировки данных (см. стр. 106). Здесь осуществим группировку так, как показано в табл. 1.4.4. Каждое значение Y, удовлетворяющее условию:

$$y_i < Y \leqslant y_{i+1},$$

Таблица 1.4.4

Группировка первичных данных из таблицы 1.4.3

Границы $y_i \div y_{i+1}$	Кодирование	Частоты значений $y_i < Y \leqslant y_{i+1}$
$4 \div 6$	II	2
$6 \div 8$	I	1
$8 \div 10$	IIII III	8
$10 \div 12$	IIII III	8
$12 \div 14$	IIII IIII	9
$14 \div 16$	IIII IIII IIII IIII I	21
$16 \div 18$	IIII IIII II	12
$18 \div 20$	IIII IIII III	13
$20 \div 22$	IIII IIII III	13
$22 \div 24$	IIII IIII	10
$24 \div 26$	III	3
Сумма частот		$N = 100$

Примечание. Вместо пятиричной системы кодирования иногда используют десятичную, которая, однако, приводит к большему числу ошибок в группировке и поэтому не может быть рекомендована.

где y_i и y_{i+1} — соседние границы, кодируется «палочкой» в соответствующей строке таблицы. Окончив кодирование всех экспериментальных данных, подсчитывают частоту и сумму частот N (табл. 1.4.4). Далее необходимо вычислить частости $P(y_i < Y \leqslant y_{i+1})$, а затем по формуле (1.4.10) — накопленные частости $P(Y \leqslant y_i)$ и сопоставить эти частости средним значениям интервалов w_i. Это выполнено в табл. 1.4.5.

Получим полигон распределения по первому способу. Для этого, считая w_i новыми границами интервалов, выберем первую и последнюю границы полигона: $w_1 = w_1 - \lambda$ и $w_{n+1} = w_n + \lambda$, соответственно $w_1 = 3$ и $w_{n+1} = 27$. Принимая $f(3) \equiv f(27) \equiv 0$, построим полигон и кумуляту на графике, как показано на рис. 1.4.5. Пользуясь табл. 1.4.5 и формулами (1.4.15), вычислим значения квартилей: $Q_1 = 11 + 2\,(0{,}25 - 0{,}19) : 0{,}09 \approx 12{,}3$; $Q_2 = 15 + 2\,(0{,}50 - 0{,}49) : 0{,}12 \approx 15{,}2$; $Q_3 = 19 + 2(0{,}75 - 0{,}74) : 0{,}13 \approx 19{,}2$.

Таблица 1.4.5

Частости полигона и кумуляты к примеру 1.4.1.

i	y_i при группировке	$w_i = y_i$ при построении	Полигон $p(y_i < Y \leqslant y_{i+1})$	Кумулята $p(Y \leqslant y_i)$
1	—	—	—	—
		3	0,00	0,00
2	4			
		5	0,02	0,02
3	6			
		7	0,01	0,03
4	8			
		9	0,08	0,11
5	10			
		11	0,08	0,19
6	12			
		13	0,09	0,28
7	14			
		15	0,21	0,49
8	16			
		17	0,12	0,61
9	18			
		19	0,13	0,74
10	20			
		21	0,13	0,87
11	22			
		23	0,10	0,97
12	24			
		25	0,03	1,00
13	26			
		27	0,00	—
$\sum_i$			1,00	—

Проверка по формулам (1.4.16) показывает, что значения квартилей вычислены правильно: $Q_1 = 13 - 2\,(0{,}75 - 0{,}72) : 0{,}09 \approx 12{,}3$; $Q_2 = 17 - 2(0{,}50 - 0{,}39) : 0{,}12 \approx 15{,}2$; $Q_3 = 21 - 2\,(0{,}25 - 0{,}13) : 0{,}13 \approx 19{,}2$.

Далее по формулам (1.4.17) и (1.4.20) вычислим полуинтерквартильное отклонение и квартильный коэффициент асимметрии: $E = 0{,}5\,(19{,}2 - 12{,}3) \approx 3{,}45$. $\mathrm{As}\,(Q) = (19{,}2 + 12{,}3 - 2 \cdot 15{,}2) : 2 \cdot 3{,}45 \approx 0{,}17$. Последняя числовая характеристика показывает, что распределение баллов достаточно близко к симметричному.

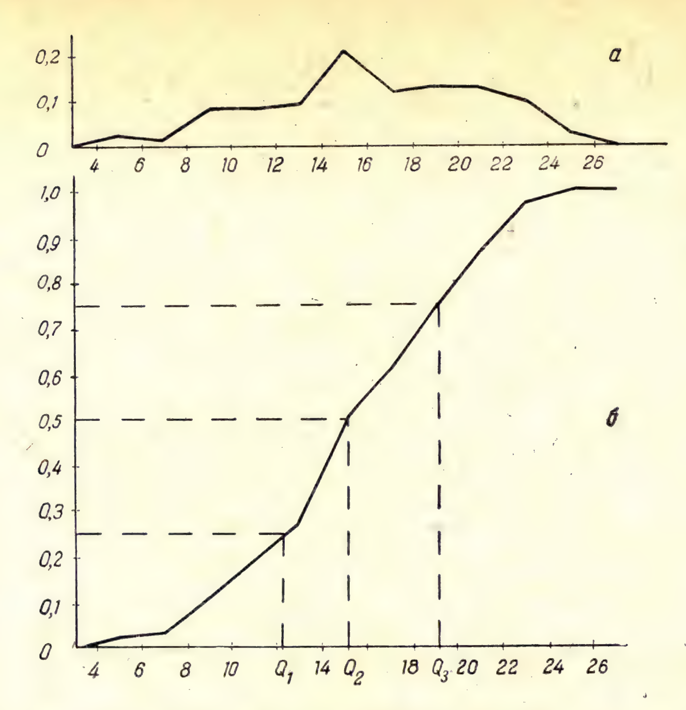


Рис. 1.4.5. Полигон (*а*) и кумулята (*б*) частостей сумм баллов к примеру 1.4.1

По оси абсцисс — границы классов группировки в баллах. По оси ординат — частости.

1.4.4. Меры корреляции рангов

Две (или более) системы упорядоченных событий могут быть стохастически взаимосвязаны, подобно тому как это имеет место для системы классифицированных событий. Стохастическая связь в этом случае известна под названием *ранговой корреляции*. Она характеризуется степенью (теснотой) и направлением, которые оцениваются для несгруппированных значений ранжированных переменных. Пусть совместно наблюдаются упорядоченные переменные X_1 и X_2, каждая из которых независимо ранжируется *, соответственно получают два ряда значений баллов Y_1 и Y_2. Если для каждой i-той пары значений ранги (баллы) полностью совпадают, то имеет место максимально тесная положительная связь. Если минимальные ранги одной переменной соответствуют максимальным рангам другой (или наоборот), то имеет место максимально тесная отрицательная связь. В общем случае

* Ранжирование выполняется независимо, но «в одном направлении» (по убыванию или по возрастанию) для обеих переменных. Правила ранжирования те же, что и при ранжировании по вероятности (стр. 49).

для n пар ранги у каждой i-той пары могут отличаться на величину от 0 до $n - 1$, при $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Для количественного выражения тесноты и направления связи ранжированных переменных Y_1 и Y_2 используются коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену и по Кендалу.

Коэффициент корреляции рангов по Спирмену определяется следующим образом. Если среди рангов каждой из переменных нет одинаковых (усредненных для «одинаковых» значений упорядоченной переменной X), то используется формула:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_i d_i^2}{n(n^2-1)}, \qquad (1.4.21)$$

где ρ — ранговый коэффициент корреляции Спирмена; $d_i = y_i^{(1)} - y_i^{(2)}$ — разность i-тых рангов переменной Y_1 и переменной Y_2; n — количество сопоставляемых пар: $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Если среди рангов каждой (или одной) из переменных имеются одинаковые, причем, возможно, несколько групп одинаковых рангов, то используется формула:

$$\rho = 1 - \frac{6\left(\sum_i d_i^2 + T_{Y_1} + T_{Y_2}\right)}{n(n^2-1)}, \qquad (1.4.21а)$$

где $T_{Y_1} = \frac{1}{12} \sum_j (t_{Y_1}^3 - t_{Y_1})$ и $T_{Y_2} = \frac{1}{12} \sum_j (t_{Y_2}^3 - t_{Y_2})$;

t_{y_1} — количество усредненных, одинаковых рангов переменной Y_1 и t_{y_2} — количество таких рангов переменной Y_2 — в j-той группе одинаковых рангов; j — номер группы одинаковых рангов (см. пример 1.4.2). Наличие одинаковых рангов означает меньшую степень дифференцировки свойств упорядоченных переменных, представляемых баллами Y_1 и Y_2, следовательно, меньше и возможности оценить степень связи между ними. Для учета этого уменьшения в формулу (1.4.21а) введены поправки T_{y_1} и T_{y_2}, в результате чего ρ, вычисленный по (1.4.21а) при $T_{y_1} > 0$ и $T_{y_2} > 0$ всегда меньше, чем вычисленный по (1.4.21).

Пример 1.4.2. * По данным анкетного обследования получены два ряда групп работников, упорядоченных: в соответствии с интересом к выполняемой работе (Y_1) и по соответствию образования и работы (Y_2). Определим, есть ли корреляция между этими переменными. Процесс вычисления ρ по уравнению (1.4.21) ясен из табл. 1.4.6:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 286{,}5}{14(14^2-1)} \approx 1 - 0{,}63 = 0{,}37.$$

---

* Заимствован из кн. Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации. «Наука», М., 1968, стр. 169, табл 462.

Таблица 1.4.6

Расчет коэффициента ранговой корреляции по Спирмену

i	Ранги Y_1		Ранги Y_2	d_i	d_i^2
1	3	$j=1$	1	2	4,00
2	3		5,5	−2,5	6,25
3	3		9	−6	36
4	3		10	−7	49
5	3		11,5	−8,5	72,25
6	6,5	$j=2$	3	3,5	12,25
7	6,5		8	−1,5	2,25
8	8		4	4	16
9	9		2	7	49
10	10		7	3	9
11	11		5,5	5,5	30,25
12	12		11,5	0,5	0,25
13	13		13	0	0
14	14		14	0	0
Суммы				0	286,50

Однако у обеих переменных имеются группы одинаковых рангов (по две группы), поэтому целесообразно воспользоваться оценкой тесноты связи по формуле (1.4.21а):

$$T_{Y_1} = \frac{1}{12}\left[(5^3-5)+(2^3-2)\right] = 10{,}5;$$

$$T_{Y_2} = \frac{1}{12}\left[(2^3-2)+(2^3-2)\right] = 1;$$

$$\rho = 1 - \frac{6\,(286{,}5+10{,}5+1)}{14\,(14^2-1)} \approx 0{,}345.$$

Коэффициент корреляции рангов по Кендалу имеет несколько способов вычисления *. Наиболее простой из них состоит в следующем. Одна из переменных ранжируется и записывается так, чтобы ранги возрастали. Другая переменная ранжируется в том же «направлении», после чего ее ранги, соответствующие рангам первой переменной, записываются рядом (см. табл. 1.4.8). Тогда коэффициент корреляции рангов Кендала определяется по формуле

$$\tau = \frac{2\sum_i Z_i}{0{,}5n\,(n-1)} - 1, \qquad (1.4.22)$$

* Дж. Э. Юл., М. Дж. Кендэл. Теория статистики. Госстатиздат, М., 1960.

где τ — коэффициент корреляции рангов Кендала; Z_i — количество рангов второй переменной, начиная с $i+1$, величина которых больше, чем величина i-того ранга этой переменной; i — номер (ранг) первой переменной, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оба коэффициента ранговой корреляции изменяются в пределах: $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$, по модулю характеризуя тесноту связи, а по знаку — ее направление. Кендал считает, что у τ имеется ряд преимуществ перед ρ. Однако это сомнительно, хотя бы потому, что в τ не предусмотрена поправка на усредненные ранги и применять его в этом случае затруднительно. Иногда используют приближенное соотношение между этими коэффициентами: $\tau \approx \approx 2/3\ \rho$, но следует помнить, что оно справедливо лишь для больших n, а также не очень малых и не очень больших значений ρ. Очевидно, что эти ограничения слишком неопределенны.

Пример 1.4.3. В результате анкетного обследования для девятнадцати важнейших видов оборудования, используемого судоводителями во время вахты, получены два ряда ранговых оценок: «по важности» оборудования (Y_1) и «по частоте» его использования (Y_2). Есть основания предполагать, что эти ряды взаимосвязаны. Для проверки тесноты и направления связи вычислим

Таблица 1.4.7

Расчет коэффициента ранговой корреляции по Спирмену (к примеру 1.4.3.)

i	Код оборудования	Ранги		d_i	d_i^2
		важность	частота		
1	А	1	1	0	0
2	Б	2	4	—2	4
3	В	3	2	1	1
4	Г	4	6	—2	4
5	Д	5	3	2	4
6	Е	6	5	1	1
7	Ж	7	12	—5	25
8	З	8	9	—1	1
9	И	9	15	—6	36
10	К	10	7	3	9
11	Л	11	11	0	0
12	М	12	8	4	16
13	Н	13	10	3	9
14	О	14	14	0	0
15	П	15	17	—2	4
16	Р	16	13	3	9
17	С	17	16	1	1
18	Т	18	18	0	0
19	У	19	19	0	0
Суммы				—18 +18	124

коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену и Кендалу. По формуле (1.4.21) определим (табл. 1.4.7):

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 124}{19\,(19^2 - 1)} \approx 0{,}89.$$

Данные для вычисления τ представлены в табл. 1.4.8. Величина Z_i (последний столбец) получается следующим образом. Для i-того ранга второй переменной (частота, в табл. 1.4.8) из оставшихся $n - i$ рангов подсчитываются те, которые больше i-того по величине. Например, при $i = 2$, величина ранга частоты 4. Просматривая оставшиеся 17 значений рангов частоты, видим, что 15 из них больше четырех, следовательно $Z_2 = 15$. Определив все Z_i, суммируем их и вычисляем по (1.4.22):

$$\tau = \frac{2 \cdot 149}{0{,}5 \cdot 19\,(19 - 1)} - 1 \approx 0{,}74.$$

Сравнивая τ и ρ, можно видеть, что, действительно, $\tau < \rho$, но при этом $\tau = 0{,}83\,\rho > 2/3\,\rho$.

Таблица 1.4.8

Расчет коэффициента ранговой корреляции Кендала (к примеру 1.4.3.)

Код оборудования	Ранги		z_i
	(i) важность	частота	
А	1	1	18
Б	2	4	15
В	3	2	16
Г	4	6	13
Д	5	3	14
Е	6	5	13
Ж	7	12	7
З	8	9	9
И	9	15	4
К	10	7	9
Л	11	11	6
М	12	8	7
Н	13	10	6
О	14	14	4
П	15	17	2
Р	16	13	3
С	17	16	2
Т	18	18	1
У	19	19	0
	Сумма		149

Наряду с корреляцией рангов двух упорядоченных и ранжированных переменных может рассматриваться корреляция рангов нескольких таких переменных. В общем случае N упорядоченных

и ранжированных переменных Y_1, Y_2, ..., Y_N, рассматриваемых совместно, образуют N-мерную систему случайных ранжированных величин. Если в такой системе значения каждой величины — это простые ранги, то можно рассматривать, во-первых, корреляцию рангов между всеми парами переменных, а во-вторых, согласованность рангов всех переменных, вместе взятых. Парные корреляции рангов в N-мерной системе упорядоченных величин числом $N(N-1)$ образуют матрицу коэффициентов ранговой корреляции (по Спирмену):

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2N} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \dots & \rho_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{1N} & \rho_{2N} & \rho_{3N} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.4.23)$$

где из-за симметричности корреляций $ij \equiv ji$, и максимальная корреляция каждой переменной с самой собой равна единице (по главной диагонали). Вместо ρ в матрице (1.4.23) могут использоваться коэффициенты τ Кендала.

Для оценки степени совместной корреляции в такой системе используются коэффициенты согласованности. Один из них представляет собой модификацию коэффициента ранговой корреляции Спирмена:

$$\bar{\rho} = 1 - \left[\frac{2N(2n+1)}{(N-1)(n-1)} - \frac{12\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N} y_{ij}\right)^2}{N(N-1)\cdot n\cdot(n^2-1)} \right], \qquad (1.4.24)$$

где $\bar{\rho}$ — коэффициент согласованности по Спирмену; N — число совместно рассматриваемых ранжированных переменных; j — номер переменной; $j = 1, 2, \dots, N$; $n = y_{\max}$ — число ранжированных значений, одинаковое для всех переменных, и равное максимальному рангу: $1 \leqslant y_{ij} \leqslant n$ — i-тый ранг j-той упорядоченной переменной; все обозначения поясняются табл. 1.4.9.

Другой коэффициент согласованности (конкордации) предложен Кендалом и Бэбингтоном Смитом:

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{n} S^2}{nN^2(n^2-1)}, \qquad (1.4.25)$$

где $S = \sum_{j=1}^{N} y_{ij} - 0{,}5N(n+1)$, а остальные обозначения те же, что и в формуле (1.4.24).

Заметим, что изменяются коэффициенты согласованности в следующих пределах: $-1 < \bar{\rho} \leqslant 1$ и $0 < W \leqslant 1$. Между обоими коэффициентами существует однозначная зависимость

$$W = \frac{1}{N}[\bar{\rho}(N-1)+1] \text{ и } |\bar{\rho}| = \frac{NW-1}{N-1}. \qquad (1.4.26)$$

Пример 1.4.4. В табл. 1.4.9 представлены ранги, полученные от трех экспертов, по отношению к одной и той же упорядоченной переменной. Спрашивается, в какой мере оценки экспертов согласованы?

Таблица 1.4.9

К вычислению коэффициентов согласованности

x_i	Эксперты (j)			$\sum_{j=1}^{N} y_{ij}$	$\left(\sum_{j=1}^{N} y_{ij}\right)^2$	S	S^2
	1	2	3				
x_1	1	3	4	8	64	—2,5	6,25
x_2	2	2	6	10	100	—0,5	0,25
x_3	3	1	1	5	25	—5,5	30,25
x_4	4	4	2	10	100	—0,5	0,25
x_5	5	5	3	13	169	2,5	6,25
x_6	6	6	5	17	289	6,5	42,25
Суммы					747	0,0	85,5

Вычислим $\bar{\rho}$ по формуле (1.4.24):

$$\bar{\rho} = 1 - \left[\frac{2\cdot 3\,(12+1)}{(3-1)\cdot(6-1)} - \frac{12\cdot 747}{3\,(3-1)\cdot 6\,(36-1)}\right] \approx 0{,}31.$$

Вычислим W по формуле (1.4.25):

$$W = \frac{12\cdot 85{,}5}{3^2\cdot 6\,(6^2-1)} \approx 0{,}54.$$

Проверим по формулам (1.4.26):

$$W = \frac{1}{3}[0{,}31\cdot(3-1)+1] = 0{,}54.$$

Если по уравнению (1.4.21) вычислить коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену между результатами, полученными каждым из экспертов, то найдем значения $\rho_{12} = 0{,}77$; $\rho_{13} = -0{,}09$ и $\rho_{23} = 0{,}26$, которые можно записать в виде корреляционной матрицы, вида (1.4.23). Заметим, что коэффициент согласия между ними есть среднее арифметическое (см. главу 2):

$$\bar{\rho} = \frac{1}{3}(\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}) = (0{,}77-0{,}09+0{,}26):3 \approx 0{,}31.$$

Глава 2

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 2.1. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЗАКОН ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1.1. Случайная величина

Под величиной условимся понимать какое-либо физическое или психическое явление, которое относительно совокупности существенных условий характеризуется совокупностью чисел.

Если изменяющимся условиям соответствует совокупность одинаковых чисел, величину называют *константой*. Если же изменяющимся условиям соответствует совокупность чисел, изменяющихся по некоторому правилу, то величину называют *переменной*.

Если при одних и тех же (фиксированных) условиях величина — безразлично, константа или переменная — принимает одно и только одно числовое значение, будем называть ее *неслучайной*.

Если при фиксированных условиях величина принимает различные числовые значения, заранее неизвестно какие, назовем такую величину *случайной*. Иначе говоря, *под случайной величиной* (*переменной*) будем понимать *такую переменную величину, которая в конкретном исходе опыта случайным образом принимает числовое значение из множества таких значений, возможных при фиксированном комплексе условий опыта*.

Случайные величины, так же как и неслучайные, могут быть дискретными (прерывными) или непрерывными. Это обстоятельство существенно для определения количественных характеристик, поэтому сначала рассмотрим специфику дискретной и непрерывной случайных величин.

Дискретная случайная величина принимает всегда конечное множество *целочисленных* значений на заданном интервале возможных значений. Это, например, такие случайные величины, как «количество случаев», «количество людей», «количество единиц продукции определенного рода» и т. п.

Непрерывная случайная величина принимает теоретически бесконечное множество значений на любом, сколь угодно малом интервале возможных значений. Это, например, такие случайные величины, как «время реакции», «объем памяти» (в битах), «ум-

ственная одаренность» и т. п. Непрерывная случайная величина при практическом использовании всегда *квантуется*, т. е. приближенно выражается в виде квантованной случайной величины.

Квантованная случайная величина определяется уже не бесконечным числом значений, а конечным числом обычно равных интервалов λ_i,* «внутри» которых переменная остается непрерывной. В этой связи, с одной стороны, квантованная случайная величина похожа на дискретную, но с другой — все-таки остается принципиально отличной от нее.

Сходство в том, что дискретная случайная величина X_D задается конечной совокупностью возможных числовых значений $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ и квантованная случайная величина X_k задается конечной совокупностью возможных числовых интервалов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i \ldots, \lambda_n$. Принципиальное различие между этими величинами состоит в следующем. Значения x_i дискретной случайной величины — обязательно неотрицательные целые числа, так как они обозначают явления, для которых понятие «часть» («доля») не имеет реального смысла (например, выражения «полслучая» или «20,62 человека» бессмысленны). Между парами значений дискретной случайной переменной существуют разрывы, поэтому не имеют смысла и разности $x_{i+1} - x_i$, и любые части таких разностей $\frac{1}{a}(x_{i+1}-x_i)$, где $a > 1$.

Наоборот, интервалы λ_i квантованной непрерывной случайной величины, адекватно отображая реальность, непосредственно «переходят» друг в друга, так что конец интервала λ_i есть в тоже время начало следующего интервала λ_{i+1} — непрерывность сохраняется. Благодаря этому имеют реальный смысл не только любые разности $\lambda_i = x_{i+1} - x_i$, но и любые сколь угодно малые доли этих разностей $\frac{1}{a}\lambda_i$ (где $1 < a < \infty$). Это в свою очередь, позволяет теоретически сколь угодно точно интерполировать значения непрерывной случайной величины на основе изучения этой величины в квантованной форме. Но принципиально неверно поступать также с дискретной переменной.

2.1.2. Закон распределения вероятностей значений случайной величины

Рассмотрим сначала закон распределения вероятностей значений дискретной случайной переменной. Тот факт, что дискретная случайная величина принимает определенное числовое значение, можно рассматривать как случайное событие и охарактеризовать возможность его появления вероятностью (частотой и частостью).

---

* В частности, при любом измерении результат определяется лишь с точностью до абсолютной ошибки измерения Δx, т. е. если результат измерений x_i определен как $x_i \pm \Delta x$, то интервал квантования $\lambda = 2\Delta x$.

Тогда дискретную случайную величину X можно определить как систему из n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, которые появляются с вероятностями $P_1(x_1), P_2(x_2), \ldots, P_i(x_i), \ldots, P_n(x_n)$.

Совокупность вероятностей $P_i(x_i)$, сопоставленных значениями x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ дискретной случайной величины X, образует *ряд распределения вероятностей значений случайной величины*.

Ряд распределения — это закон, связывающий отдельные значения дискретной случайной величины с вероятностями их появления.

Ряд распределения может быть представлен в табличной форме (табл. 2.1.1) и в виде «палочковой» диаграммы, как показано на рис. 2.1.1, *а* *.

Таблица 2.1.1

Ряды распределения вероятностей значений дискретной случайной величины

Значения X	$P_i(x_i)$	$P_i(X \leqslant x_i)$	Значения X	$P_i(x_i)$	$P_i(X \leqslant x_i)$
x_1	0,05	0,05	x_5	0,20	0,85
x_2	0,10	0,15	x_6	0,10	0,95
x_3	0,20	0,35	x_7	0,05	1,00
x_4	0,30	0,65	$\sum_{i=1}^{7}$	1,00	—

Другим способом выражения закона распределения вероятностей значений дискретной случайной величины является кумулятивный ряд распределения. *Кумулятивным рядом распределения* будем называть совокупность вероятностей

$$\left.\begin{array}{c} P(X \leqslant x_k) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x_i), \\ \text{при } k \leqslant n, \end{array}\right\} \qquad (2.1.1)$$

сопоставленных значениям x_i дискретной случайной величины X (табл. 2.1.1 и рис. 2.1.1, *б*).

Так как множество возможных числовых значений дискретной случайной величины образует полную группу событий, то полная вероятность для ряда распределения равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i) = 1. \qquad (2.1.2)$$

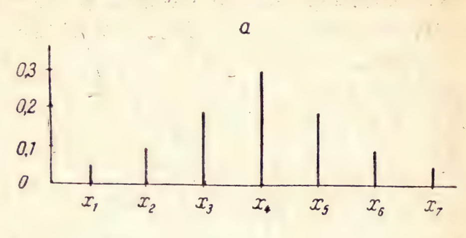
* Отметим, что изображение ряда распределения в виде гистограммы или полигона (Вентцель) не правомерно.

Рассмотрим далее понятие закона распределения вероятностей для квантованной случайной величины.

Факт появления значения x_i квантованной случайной величины X на i-том интервале λ_i снова можно рассматривать как случайное событие и характеризовать некоторой вероятностью

$$\left.\begin{aligned} &P_i(x_i < X \leqslant x_i + \lambda_i) \quad \text{или} \\ &P_i(x_i \leqslant X < x_i + \lambda_i) \quad \text{или} \\ &P_i(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_i), \end{aligned}\right\} \tag{2.1.3}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.



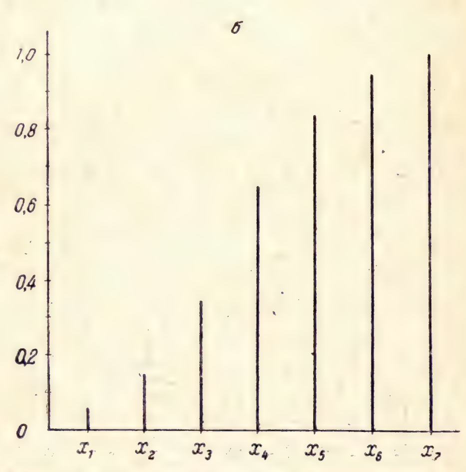


Рис. 2.1.1. Графическое представление ряда распределения (*а*) и кумулятивного ряда распределения (*б*).

По осям абсцисс — значения x_i дискретной случайной величины X, по осям ординат — вероятности: $P_i(x_i)$ на *а* и $P_i(X \leqslant x_i)$ на *б*.

Совокупность таких вероятностей (а также частот, частостей), сопоставленная совокупности интервалов квантования непрерывной случайной величины образует *полигон распределения* или *гистограмму распределения вероятностей* значений квантованной непрерывной случайной величины.

Наряду с вероятностью (2.1.3) важное значение имеет вероятность квантованной случайной величине X принять значение, меньшее или не большее, чем некоторое значение x_k, соответственно:

$$\left.\begin{aligned} &P(X < x_k) \quad \text{или} \\ &P(X \leqslant x_k). \end{aligned}\right\} \tag{2.1.4}$$

Совокупность таких вероятностей:

$$\left.\begin{aligned} &P(X < x_k) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x_i \leqslant X < x_i + \lambda_i) \quad \text{или} \\ &P(X \leqslant x_k) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x_i < X \leqslant x_i + \lambda_i) \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{k} P_i(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_i) \\ &\text{при } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ и } x_{\min} \leqslant x_k \leqslant x_{\max}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1.5}$$

$$0 \leqslant P(X \leqslant x_k) \leqslant 1,$$

сопоставленных совокупности интервалов квантования, образует *кумулятивный полигон* (или *кумулятивную гистограмму*) распределения вероятностей значений квантованной непрерывной переменной. *

Формально аналитическое, табличное и графическое представления полигона, гистограммы и кумуляты для квантованной случайной величины те же самые, что и для упорядоченной, ранжированной случайной величины (§ 1.4). Но по существу наших сведений об этих величинах здесь имеются два важных отличия. Первое отличие состоит в том, что интервал λ у квантованной непрерывной случайной величины может быть выражен любым действительным числом, а у ранжированной случайной величины

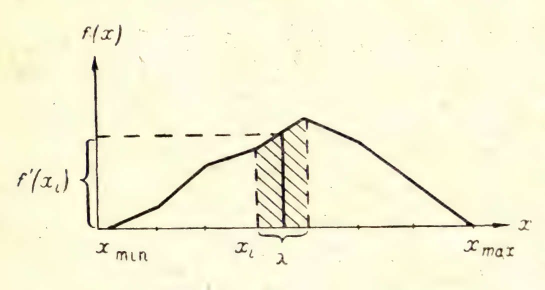


Рис. 2.1.2. Схематическое изображение полигона распределения вероятностей квантованной непрерывной случайной величины X.

По оси абсцисс — ее значения x. По оси ординат — значения плотности вероятности. $x_{min} \div$ $\div x_{max}$ — область определения величины X. Заштрихована «элементарная» трапеция; λ — интервал квантования и высота этой трапеции, $f'(x_i)$ — ее средняя линия.

классовый интервал λ — обязательно целое число. Второе отличие (оно, кстати сказать, обусловливает и первое), состоит в том, что у квантованной случайной величины интервал λ точно определен по значению самой величины, тогда как у ранжированной случайной величины классовый интервал семантически фиктивен: он лишь приближенно обозначает интервалы квантования, точные значения которых нам неизвестны.

Указанные отличия позволяют гносеологически оправданно осуществить предельный переход от полигона, гистограммы и кумуляты квантованной случайной величины к монотонным функциям, в общем и явном виде выражающим закон распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины.

Чтобы ввести понятие закона распределения для непрерывной случайной переменной, рассмотрим «элементарную» трапецию ** полигона распределения, схематически изображенного на рис.2.1.2. Площадь этой трапеции (на рис. 2.1.2 заштрихована) численно равна вероятности того, что случайная величина примет значение на интервале λ:

$$f'(x_i) \cdot \lambda = P(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda), \tag{2.1.6}$$

где $f'(x_i)$ — средняя линия «элементарной» трапеции.

* Ломаную линию, ограничивающую сверху кумулятивный полигон, называют *кумулятой*.

** Аналогичные рассуждения можно провести и для «элементарного» прямоугольника гистограммы.

Очевидно, что уравнение (2.1.6) не изменится, если уменьшать высоту трапеции λ и одновременно соответствующим образом увеличивать ее среднюю линию $f'(x_i)$:

$$a \cdot f'(x_i) \cdot \frac{\lambda}{a} = P(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda), \qquad (2.1.7)$$

где $a > 0$ — произвольная константа. Тогда, увеличивая константу «а» в (2.1.7), уменьшаем интервал квантования λ до бесконечно малой (но не нулевой) величины. В результате получаем некоторое значение средней линии «элементарной» трапеции $f(x_i)$, соответствующее бесконечно малому λ и неизменной вероятности $P(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda)$. Это значение $f(x_i)$ будем называть *теоретической плотностью вероятности.*

Теоретическая плотность вероятности показывает «удельное количество» вероятности, приходящееся на бесконечно малый интервал значений непрерывной случайной величины.

Очевидно, что каждому из бесконечно малых интервалов квантования dx непрерывной случайной величины X соответствует некоторое значение теоретической плотности вероятности $f(x)$, а совокупности таких значений соответствует совокупность плотностей.

Функцию, устанавливающую соответствие между бесконечно малыми интервалами квантования dx и плотностями $f(x)$ будем называть *функцией плотности распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины* — сокращенно — *плотностью вероятностей* — и обозначать $f(x)$.

Функция плотности, таким образом, это предел, к которому стремится ломаная линия, ограничивающая сверху полигон или гистограмму распределения при устремлении интервала квантования λ к нулю. *

Аналогичный предел можем получить и для кумуляты. Для этого нам, в сущности, необходимо найти *сумму бесконечно большого числа слагаемых*, каждое из которых есть вероятность $f(x)\,dx$ появиться значению x на бесконечно малом интервале dx. Такую сумму будем называть интегралом и записывать следующим образом: **

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^{x} f(x)\,dx. \qquad (2.1.8)$$

---

* Важно отметить, что при $dx = 0$ и $P(x \leqslant X \leqslant x + \lambda) = 0$, как следует из формулы (2.1.6). Иначе говоря, в отличие от дискретной случайной величины для непрерывной случайной величины вероятность отдельного значения (а этому и соответствует $dx = 0$) равна нулю.

** Знак $\int_{x_{\min}}^{x}$ читается как интеграл от $x_{\min}$ до x, $x_{\min}$ называется нижним пределом интегрирования, а x — верхним переменным (текущим) пределом интегрирования.

Функция $F(x)$, удовлетворяющая уравнению (2.1.8), называется (*интегральной*) *функцией распределения вероятностей* значений x непрерывной случайной величины X, сокращенно — *функцией распределения*. Она показывает вероятность того, что случайная величина будет меньше или не превзойдет одного из возможных значений, соответственно:

$$F(x) = P(X < x)$$

или

$$F(x) = P(X \leqslant x). \quad (2.1.9)$$

Очевидно, что все бесконечное множество значений непрерывной случайной величины образует полную группу событий. Поэтому

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)\,dx = 1, \quad (2.1.10)$$

где $x_{\min} \div x_{\max}$ — область возможных значений случайной величины X.

Функция распределения $F(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ — это две формы выражения закона распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины. Знать одну из них — это значит полностью определить случайную величину. *

Необходимо еще раз подчеркнуть, что на практике имеют дело не с бесконечно малыми, а с конечными значениями интервалов квантования λ. Поэтому, обрабатывая данные психологических экспериментов, пользуются не теоретической плотностью вероятности, а эмпирической, которую получают из полигона или гистограммы делением вероятностей на λ_i, например:

$$f(x_i) = \frac{1}{\lambda_i} P_i(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_i). \quad (2.1.11)$$

Таким образом, эмпирическую плотность вероятности можно рассматривать как вероятность, выраженную в единицах интервала квантования. ** Аналогично и вместо теоретической функции распределения используется эмпирическая функция, в качестве которой выступает кумулята. При этом интеграл заменяется суммой, как в уравнениях (2.1.5).

---

* Дифференцируя функцию распределения, получают плотность: $d[F(x)] = f(x)$, поэтому функцию плотности нередко называют *дифференциальной функцией распределения*. Зная одну из этих форм закона распределения непрерывной случайной величины, всегда можно найти другую: операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратимы, так же как, например, вычитание и сложение.

** Из (2.1.10), очевидно, следует, что при $\lambda_i = 1$, $f(x) \equiv P_i(x_i) \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_i)$ плотность численно равна вероятности.

2.1.3. Основные свойства законов распределения

Как и для упорядоченных переменных, законы распределения вероятностей случайных величин (дискретных и непрерывных) могут отличаться друг от друга *положением* на числовой оси (рис. 2.1.3, *а*), *рассеиванием* значений (рис. 2,1.3, *б*), *асимметрией* (косостью, скошенностью) рассеивания значений (рис. 2.1.3, *в*), а также *эксцессом* (выпуклостью, «кучностью») рассеивания (рис. 2.1.3, *г*). Эти четыре свойства по отдельности и в комбинациях обусловлены как спецификой случайной величины, так и условиями ее наблюдения. Кроме того, будучи выражены количественно, эти свойства являются параметрами большинства

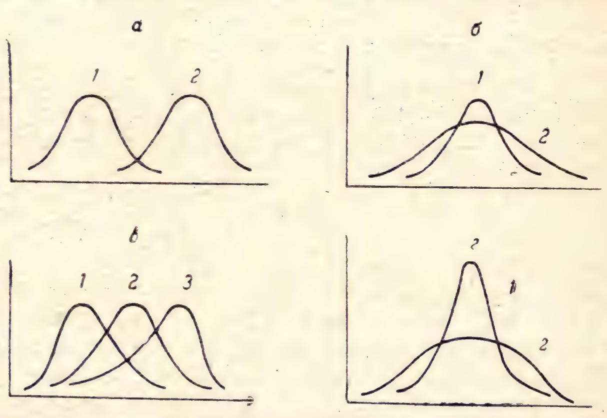


Рис. 2.1.3. Основные свойства законов распределения случайной величины.

По оси абсцисс — значения x непрерывной случайной величины X; по оси ординат — плотности вероятности $f(x)$.
а — кривые *1* и *2* различаются только положением на числовой оси; *б* — кривые *1* и *2* имеют одинаковое положение, но рассеивание меньше у кривой *1*; *в* — кривые различаются только положением и асимметрией: кривая *1* имеет положительную асимметрию, кривая *3* — отрицательную, кривая *2* — нулевую (симметрична); *г* — кривые различаются только по дисперсии и эксцессу, для кривой *1* он больше.

встречающихся на практике законов распределения. Поэтому выбирая меры, количественно характеризующие положение, рассеивание, асимметрию и эксцесс, во-первых, можно сравнивать случайные величины по выраженности отдельных свойств, а, во-вторых, во многих случаях можно с помощью выбранных мер определить в явном виде функции распределения.

Меры, количественно характеризующие указанные четыре, а также и другие отдельные свойства закона распределения обычно называются его *числовыми характеристиками* (параметрами).

§ 2.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.2.1. Меры положения

Мер положения много, но каждая из них преимущественно используется только в определенных условиях.

Мода, уже известная нам по системам классифицированных и упорядоченных событий, — это значение случайной величины,

имеющее наибольшую вероятность появления. Мода является единственно возможной мерой положения для существенно дискретной случайной величины.

Для непрерывных случайных величин, имеющих «выпуклую» функцию распределения (см. рис. 2.1.3), мода определяется из условия максимума функции:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) = 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} f(x) < 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.1)$$

где $f(x)$ — плотность вероятности, $\frac{d}{dx} f(x)$ — ее первая производная и $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ — ее вторая производная.

Для квантованных непрерывных случайных величин с «выпуклой» гистограммой приближенно за моду принимается среднее значение классового интервала λ. Более точно значение моды получается по формуле

$$\text{Mo} = x_i + \lambda \left(\frac{P_2 - P_1}{2P_2 - P_1 - P_3} \right), \qquad (2.2.2)$$

где Мо — мода, x_i — начало модального класса; λ — классовый интервал; P_1 — вероятность (частота, частость) класса, предшествующего модальному классу, P_2 — то же для модального класса, P_3 — то же для класса, следующего за модальным.

Необходимо отметить, что среди распределений встречаются «*унимодальные*», у которых мода отсутствует (рис. 2.2.1, *а*) и *полимодальные*, у которых две и более мод (рис. 2.2.1, *б*). *

Медиана уже была рассмотрена применительно к распределению вероятностей ранжированной случайной величины. Точно также (стр. 70) она вычисляется и для квантованной переменной.

Для распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины медиана определяется из условия:

$$\int\limits_{x_{\min}}^{\text{Me}} f(x)\, dx = \int\limits_{\text{Me}}^{x_{\max}} f(x)\, dx = 0{,}5, \qquad (2.2.3)$$

где $x_{\min} \div x_{\max}$ — «границы» области наблюдения (существования) случайной величины X; $f(x)$ — ее плотность вероятности; Me — медиана.

Необходимо отметить, что для квантованных и непрерывных случайных величин медиана имеет ограниченное применение. А для дискретной случайной величины медиана *вовсе неприменима*.

---

* Полимодальные распределения, в сущности, представляют собой *композицию* одномодальных распределений и получаются в результате нестабильности условий опыта.

Средние значения. Только для квантованных и непрерывных случайных величин появляется возможность использовать в качестве мер положения средние значения: среднее гармоническое, среднее арифметическое, среднее квадратическое, среднее кубическое и так далее — среднее m-ной степени, а также среднее геометрическое.

Среднее гармоническое (H) определяется для непрерывной случайной величины как

$$\frac{1}{\mathrm{H}} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{f(x)\,dx}{x}, \tag{2.2.4}$$

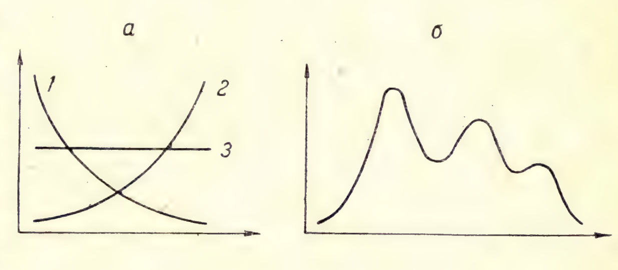


Рис. 2.2.1. Унимодальные распределения (*а*, кривые *1*, *2*, *3*, характеризуют различные типы таких распределений) и полимодальное распределение (*б*).

По осям абсцисс — значения непрерывной случайной величины, по осям ординат — плотности вероятностей.

а для квантованной соответственно как

$$\frac{1}{\mathrm{H}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} P_i, \tag{2.2.5}$$

где P_i — это сокращенное $P_i\,(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda)$, а все остальные обозначения прежние. Среднее гармоническое часто используется для оценки средних скоростей движения и частот колебаний.

Среднее арифметическое (M) * определяется для непрерывной случайной величины как

$$\mathrm{M} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x f(x)\,dx, \tag{2.2.6}$$

а для квантованной соответственно как

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M} &= \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \\ \text{или} \quad \mathrm{M} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

где P_i — частости или вероятности, f_i — частоты на интервалах λ.

---

* Очень часто для среднего арифметического значения случайной величины X в литературе используются обозначения: x_0 и $\bar{x}$.

Среднее квадратическое (S) определяется для непрерывной случайной величины, как

$$S=\sqrt{\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 f(x)\,dx}\,, \tag{2.2.8а}$$

а для квантованной как

$$S=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i}\,. \tag{2.2.8б}$$

Среднее кубическое значение (θ) и *среднее четвертой степени* (Q) определяются сходным образом:

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\sqrt[3]{\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^3 f(x)\,dx}\\ &\text{или}\\ \theta&=\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} x_i^3 P_i}\end{aligned}\right\} \tag{2.2.10}$$

и

$$\left.\begin{aligned}Q&=\sqrt[4]{\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^4 f(x)\,dx}\\ &\text{или}\\ Q&=\sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n} x_i^4 P_i}\end{aligned}\right\} \tag{2.2.10а}$$

Важно отметить, что из перечисленных *средних основной мерой положения является среднее арифметическое* значение. Среднее гармоническое используется как мера положения распределения частоты колебаний, а также скорости. Средние: квадратическое, кубическое и четвертой степени используются при вычислении мер рассеивания, асимметрии и эксцесса.

Среднее геометрическое (G) определяется для квантованной случайной величины как

$$G=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i}}\,, \tag{2.2.11}$$

где x — средние значения интервалов квантования λ_i; f_i — частоты появления значений на i-тых интервалах; или

$$G=\prod_{i=1}^{n} x_i^{P_i}, \tag{2.2.12}$$

где P_i — вероятности (частости); $\prod_{i=1}^{n}$ — обозначение произведения всех x_i при $i=1, 2, \ldots, n$.

Среднее геометрическое вычисляется только при положительных x_i и используется, в частности, для определения эффективности выполнения человеком последовательности рабочих операций и для оценки среднего эффекта тренировки.

Логарифмируя (2.2.11) и (2.2.12), можно видеть, что логарифм среднего геометрического

$$\log G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \log x_i \qquad (2.2.12а)$$

— это среднее арифметическое (2.2.7) логарифмов значений квантованной переменной. В этой связи необходимо специально остановиться на понятии «среднего значения» (*математическое ожидание*). В теории вероятностей и математической статистике это понятие *многозначно*. С одной стороны, это понятие обозначает меру положения. В таком смысле оно и употреблялось выше. С другой стороны, понятие «математическое ожидание» означает специфическую операцию, смысл которой выражается следующим образом:

$$M[Z] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i f_i = \sum_{i=1}^{n} z_i P_i$$

для квантованной переменной Z, принимающей не более n возможных значений, и

$$M[Z] = \int_{z_{min}}^{z_{max}} zf(z)\,dz$$

для непрерывной переменной Z, определенной на интервале ($z_{min} \div z_{max}$), причем сама переменная Z может быть любой функцией (суммой, произведением, степенью и т. п.). Например, можно уравнение (2.2.12) записать, используя знак операции «математическое ожидание» (M [. . .]):

$$M[\log G] = \sum_{i=1}^{n} \log x_i P_i.$$

Наконец, имеется третье значение этого понятия, а именно: математическое ожидание как среднее арифметическое не любой, а *генеральной* совокупности (стр. 276)

Отметим в заключение вопроса о средних, что между ними существует следующее отношение порядка:

$$x_{min} < H < G < M < S < \text{среднее кубич.} < \text{среднее четвертой степени} < \ldots < x_{max}. \qquad (2.2.12б)$$

2.2.2. Меры рассеивания

Среди мер рассеивания наибольший интерес представляют размах распределения и различные отклонения от мер положения.

Размах распределения — это область наблюдавшихся значений случайной величины:

$$d = x_{\max} - x_{\min}. \qquad (2.2.13)$$

Для дискретных случайных величин размах является единственно допустимой мерой рассеивания. Но для непрерывных случайных величин он лишь приближенно характеризует рассеивание. Например, кривые на рис. 2.1.3 имеют одинаковый размах, но разное рассеивание.

Среднее (*арифметическое или абсолютное*) *отклонение* для непрерывной случайной величины определяется формулой

$$\delta = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} |x - M_x| \, f(x) \, dx, \qquad (2.2.14)$$

а для квантованной

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} |x_i - M_x| \cdot P_i, \qquad (2.2.15)$$

где $|x - M_x|$ — абсолютная величина (*модуль*) отклонения значений x_i случайной величины X от ее среднего арифметического значения M_x; $P_i \approx f(x)\,dx$ — вероятность (частость) появления значений на i-том интервале квантования. Несмотря на простоту вычисления, абсолютное отклонение имеет ограниченное применение из-за ряда трудностей его использования в теории статистики.

Наиболее употребительной мерой рассеивания является *стандартное* (*или среднее квадратическое*) *отклонение*, определяемое как

$$\sigma_x = |\sqrt{D_x}|, \qquad (2.2.16)$$

где величина D_x, называемая *дисперсией*, определяется уравнениями

$$D_x = \begin{cases} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - M_x)^2 \cdot f(x) \, dx & \text{или} \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^2 \cdot P_i \end{cases} \qquad (2.2.17)$$

соответственно для непрерывной и для квантованной случайных величин.

Меньше распространено теоретически, но всегда используется практически другое определение дисперсии — как разности между

квадратами среднего квадратического и среднего арифметического значений:

$$D_x = S_x^2 - M_x^2, \qquad (2.2.18)$$

где S_x — среднее квадратическое, согласно уравнениям (2.2.8) и (2.2.9); M_x — среднее арифметическое значение, согласно уравнениям (2.2.6) и (2.2.7).

Дисперсия тоже является мерой рассеивания, что отображено в самом термине («дисперсия» и означает «рассеивание»). Однако там, где требуется учитывать качество (наименование) случайной величины, квадратическая мера, какой является дисперсия, неудобна. Тогда применяется стандартное отклонение.

Следует указать, что для «не очень» асимметричных распределений справедливо приближенное равенство, связывающее среднее арифметическое и стандартное отклонения:

$$\delta \approx 0{,}8 \cdot \sigma. \qquad (2.2.18а)$$

Стандартное отклонение можно определить по аналогии с полуинтерквартильным отклонением (стр. 71) как половину величины интервала рассеивания значений x непрерывной (или квантованной) случайной величины X, в пределах которого вероятность появления этих значений составляет $\approx {}^2/_3$. Тогда между срединным отклонением (E) и стандартным отклонением (σ) имеется следующее количественное соотношение:

$$E = 0{,}674 \cdot \sigma. \qquad (2.2.18б)$$

Отметим, что срединное отклонение E редко используется в настоящее время применительно к непрерывным (и квантованным) случайным величинам.

В отдельных случаях для сравнения рассеивания *разноименных* случайных величин применяются *безразмерные* меры рассеивания. Одной из таких мер служит коэффициент вариации (вариативности), предложенный Карлом Пирсоном.

Коэффициент вариации определяется в долях или в процентах как отношение стандартного отклонения (σ_x) к среднему арифметическому значению (M_x):

$$V = \frac{\sigma_x}{M_x}(100\,\%). \qquad (2.2.19)$$

Важно помнить, что этот коэффициент существенно зависит от M_x. Поэтому его применение для цели сравнения ограничивается теми случаями, когда распределения имеют одинаковые начала отсчета и одинаковые по модулю средние арифметические. Иначе сравнение может привести к ложному результату.

2.2.3. Меры асимметрии и эксцесса

Наиболее употребительной мерой асимметрии для непрерывных и квантованных распределений является *коэффициент асимметрии* (As), определяемый как

$$\mathrm{As} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_x^3} \displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \mathrm{M}_x)^3 f(x)\, dx \quad \text{или} \\ \dfrac{1}{\sigma_x^3} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}_x)^3 P_i, \end{cases} \tag{2.2.20}$$

где все обозначения использовались выше. В отличие от квартильного коэффициента (стр. 71), этот коэффициент асимметрии изменяется в пределах

$$-\infty < \mathrm{As} < \infty.$$

При $\mathrm{As} = 0$ распределение считается симметричным (см. рис. 2.1.3, *в*, кривая *2*), при $\mathrm{As} > 0$ распределение имеет «скошенность влево» (там же, кривая *1*) и при $\mathrm{As} < 0$ распределение «скошено вправо» (там же, кривая *3*).

В качестве меры выпуклости (эксцесса) пользуется *коэффициент эксцесса* (Ex), определяемый как

$$\mathrm{Ex} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_x^4} \displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \mathrm{M}_x)^4 f(x)\, dx - 3 \quad \text{или} \\ \dfrac{1}{\sigma_x^4} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}_x)^4 P_i - 3, \end{cases} \tag{2.2.21}$$

$$-\infty < \mathrm{Ex} < \infty.$$

За «начало отсчета» выпуклости распределений принято значение коэффициента эксцесса для нормального закона распределения, для которого $\mathrm{Ex} = 0$.

§ 2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

При определении числовых характеристик изучаемой случайной величины по экспериментальным данным необходимо учитывать ряд обстоятельств.

Во-первых, из числа указанных выше мер, характеризующих одно и то же свойство закона распределения, необходимо выбрать ту меру, которая достаточно информативна с точки зрения цели исследования, а также применима к изучаемой случайной величине, согласно ее специфике. Например, сравнивая две группы

людей по рассеиванию некоторого изучаемого психического свойства, можно воспользоваться приближенной оценкой рассеивания с помощью размаха. Если размахи значительно отличаются, допустим,

$$\Delta d = |d_1 - d_2| > 1{,}5 \text{ или } 2,$$

то степень приближения к истинному ответу велика и применение размаха в качестве меры рассеивания оправдано. В противном случае следует воспользоваться более точной мерой — дисперсией. Выше мы указывали, что для дискретной случайной величины, в сущности, применимы корректно лишь мода и размах. Этим обстоятельством часто пренебрегают, поступая с дискретной переменной как с квантованной. Это может быть допустимо в случае, когда совместно рассматриваются дискретные и непрерывные случайные величины, и целесообразно использовать одинаковый математический аппарат, но лишь при условии округления окончательных результатов (применительно к дискретной величине) до целочисленных значений. К непрерывной случайной величине можно применять все рассмотренные выше меры, в том числе, моду, медиану и размах, разумеется, если эти меры соответствуют задаче исследования. Наконец, в ряде случаев можно использовать вместо одного из средних значений другое, проще вычисляемое.

Во-вторых, после того как нужная мера выбрана, следует для нее подобрать вычислительную формулу, соответствующую массиву экспериментальных данных и, по-возможности, обеспечивающую меньше субъективных ошибок при ее использовании. Дело в том, что большинство мер можно вычислять различными способами и наряду с «понятийными» формулами, приведенными выше, существует немало так называемых «вычислительных» формул. В результате оказывается, что для маленького массива данных лучше один способ, а для большого — другой; при вычислениях вручную с помощью бумаги и карандаша — снова лучше один, на арифмометре — другой, а при машинном счете (на ЭЦВМ) третий способ.

Важно подчеркнуть, что выбор необходимых мер и вычислительных формул — это своего рода искусство, приобретаемое лишь на практике.

2.3.1. Вычисление мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса по несгруппированным данным

Массив экспериментальных данных, составленный значениями x_i случайной величины X, где $i = 1, 2, \ldots, n$ при

$$N \leqslant 80 \div 100 \qquad (2.3.1)$$

группировать не имеет смысла. Учитывая статистическое определение вероятности (стр. 15), можно видеть, что при условии

(2.3.1) нельзя получить устойчивые экспериментальные оценки вероятностей $P(x_i)$ или $P(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_i)$. Поэтому здесь не применимы мода и медиана и большинство «понятийных» формул для других мер, рассмотренных выше.

Вычисление средних значений в качестве мер положения здесь осуществляется в соответствии с общей формулой

$$\text{Среднее} = \sqrt[h]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^h}, \qquad (2.3.2)$$

из которой, придавая показателю h и переменной x разные значения, можно получить все вычислительные формулы.

Для среднего гармонического значения, полагая в (2.3.2) $h = -1$, получаем

$$\mathrm{H} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}. \qquad (2.3.2а)$$

Для среднего арифметического значения, полагая $h = 1$, получаем

$$\mathrm{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \qquad (2.3.2б)$$

Для среднего квадратического значения $h = 2$ и

$$\mathrm{S} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}. \qquad (2.3.2в)$$

Для среднего кубического значения $h = 3$ и

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^3}. \qquad (2.3.2г)$$

Для среднего значения четвертой степени $h = 4$

$$\mathrm{Q} = \sqrt[4]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^4}. \qquad (2.3.2д)$$

Наконец, для среднего геометрического значения, полагая $h = 1$ и заменяя в (2.3.2) все x_i их логарифмами, получаем

$$\log \mathrm{G} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log x_i. \qquad (2.3.2е)$$

Кроме неравенств (2.2.12, б), существует приближенное линейное равенство, связывающее все степенные средние значения *:

$$\bar{x}_h \cong \mathrm{M} + \frac{h-1}{2} \cdot \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{M}}, \qquad (2.3.3)$$

где $\bar{x}_h$ — среднее значение h-ей степени из числа рассмотренных с помощью формул (2.3.2)—(2.3.2г); $h = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$; M — среднее арифметическое значение; D — дисперсия. Использование равенства (2.3.3) имеет смысл для приближенной оценки одних средних через посредство других, проще вычисляемых, например, через посредство среднего арифметического. Нужно при этом помнить, что использование равенства (2.3.3) ограничивается, во-первых, степенью асимметрии распределения, а во-вторых, величиной коэффициента вариации. Чем симметричнее распределение и чем меньше рассеивание, тем точнее приближение формулой (2.3.3).

Вычисление мер рассеивания осуществляется, за исключением размаха, через посредство мер положения: среднего арифметического и среднего квадратического значений.

Среднее абсолютное отклонение вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i - \mathrm{M}|. \qquad (2.3.4)$$

Дисперсия вычисляется по формуле (2.2.18) как разность между квадратом среднего квадратического и квадратом среднего арифметического значений, а также непосредственно по формуле

$$\mathrm{D} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mathrm{M})^2. \qquad (2.3.5)$$

Стандартное отклонение (σ) и *коэффициент вариации* (V) вычисляются соответственно по формулам (2.2.16) и (2.2.19), указанным выше.

Вычисление мер асимметрии и эксцесса выполняется через посредство средних: арифметической, квадратической, кубической и четвертой степени:

$$\mathrm{As} = \frac{1}{\sigma \mathrm{D}} (\theta^3 - 3\mathrm{S}^2\mathrm{M} + 2\mathrm{M}^3) \qquad (2.3.6)$$

и

$$\mathrm{Ex} = \frac{1}{\mathrm{D}^2} (Q^4 - 4\theta^3\mathrm{M} + 6\mathrm{S}^2\mathrm{M}^2 - 3\mathrm{M}^4) - 3, \qquad (2.3.7)$$

* К. Джини. Средние величины «Статистика», М., 1970, стр. 180. См. также Б. С. Ястремский. Некоторые вопросы математической статистики. Госстатиздат, М., 1961, стр. 120.

где As — коэффициент асимметрии; Ex — коэффициент эксцесса; σ — стандартное отклонение; D — дисперсия; M — среднее арифметическое; S — среднее квадратическое; θ — среднее кубическое; Q — среднее четвертой степени.

Кроме того, вычислить As и Ex можно непосредственно по формулам

$$\mathrm{As} = \frac{1}{N\sigma \mathrm{D}} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mathrm{M})^3 \qquad (2.3.8)$$

и

$$\mathrm{Ex} = \frac{1}{N\mathrm{D}^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mathrm{M})^4. \qquad (2.3.9)$$

Следует, однако, заметить, что формулы (2.2.18), (2.3.6) и (2.3.7) предпочтительнее для вычислений вручную, чем формулы (2. 3.5), (2.3.8) и (2.3.9), соответственно, так как, рассчитывая разности (x_i — M), люди часто ошибаются. Тем не менее, наилучший путь для получения верного результата — это вычисления двумя разными способами: совпадение ответов с приемлемой точностью гарантирует их верность.

Пример 2.3.1. Экспериментально определены скорости, с которыми люди записывают цифры арабского алфавита (табл. 2.3.1) *. Требуется количественно оценить положение, рассеивание, асимметрию и эксцесс распределения значений скорости записывания цифр людьми по экспериментальным данным.

Таблица 2.3.1

Исходные данные к примеру 2.3.1

Цифра	Скорость записи, 1/*сек*	Цифра	Скорость записи, 1/*сек*
1	5,9	6	4,5
2	3,1	7	2,8
3	3,6	8	2,8
4	3,4	9	2,9
5	2,1	0	5,0
		$\sum_{i=1}^{10}$	36,1

Для вычисления оценок всех мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса, рассмотренных выше, нам потребуются как это следует из формул (2. 3. 2)—(2.3.9), а также (2.2.16), (2.2.18)

* Данные к примеру с некоторыми изменениями заимствованы из работы: Н. М. Кандарацкова, Г. В. Суходольский. Об эффективности и надежности элементарных вычислительных операций. В сб. Экспериментальная и прикладная психология, вып. 1. Изд. ЛГУ, 1968.

и (2.2.19) следующие величины: $\frac{1}{x_i}$; $\lg x_i$; x_i^2; x_i^3 и x_i^4, а после вычисления среднего арифметического (M) разности: $(x_i - M)$ и $|x_i - M|$; $(x_i - M)^2$, $(x_i - M)^3$ и $(x_i - M)^4$. Эти величины и разности должны быть суммированы по $i = 1, 2, \ldots, 10$, после чего по соответствующим формулам рассчитываются оценки мер. Выполним расчет промежуточных величин и разностей в табл. 2.3.2 и 2.3.3.

Таблица 2.3.2

Промежуточные величины, необходимые для расчета оценок мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса. Значения x_i см. в табл. 2.3.1

i	$\frac{1}{x_i}$	$\lg x_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4
1	0,170	0,7709	34,81	205,38	1211,70
2	0,323	0,4914	9,61	29,79	92,35
3	0,278	0,5563	12,96	46,66	168,00
4	0,294	0,5315	11,56	39,30	133,63
5	0,476	0,3222	4,41	9,26	19,45
6	0,222	0,6532	20,25	91,12	410,10
7	0,357	0,4472	7,84	21,95	61,47
8	0,357	0,4472	7,84	21,95	61,47
9	0,345	0,4624	8,41	24,39	70,73
10	0,200	0,6990	25,00	125,00	625,00
$\sum_{i=1}^{10}$	3,02	5,3813	142,69	614,80	2853,90

Пользуясь формулой (2.3.2а) и суммой из второго столбца табл. 2.3.2, вычислим среднее гармоническое:

$$H = \frac{10}{3,02} \approx 3,31 \ (1/\textit{сек}).$$

Используя сумму из второго столбца табл. 2.3.1 и формулу (2.3.2б), вычисляем среднее арифметическое:

$$M = \frac{36,1}{10} = 3,61 \ (1/\textit{сек}).$$

Аналогично по формулам (2.3.2в)—(2.3.2д) и суммам в четвертом — шестом столбцах табл. 2.3.2 вычисляем среднее квадратическое, кубическое и четвертой степени соответственно:

$$S = \sqrt{\frac{1}{10} 142,69} \approx 3,78 \ (1/\textit{сек}),$$

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{1}{10} 614,8} \approx 3,95 \ (1/\textit{сек}),$$

$$Q = \sqrt[4]{\frac{1}{10} 2853,9} \approx 4,11 \ (1/\textit{сек}).$$

Таблица 2.3.3

Степени центральных отклонений* (разностей) к примеру 2.3.1. Значения x_i см. в табл. 2.3.1.

i	$x_i - M$	$(x_i - M)^2$	$(x_i - M)^3$	$(x_i - M)^4$
1	2,3	5,29	12,167	27,9841
2	—0,5	0,25	—0,125	0,0625
3	0,0	0,00	0,000	0,0000
4	—0,2	0,04	—0,008	0,0016
5	—1,5	2,25	—3,375	5,0625
6	0,9	0,81	0,729	0,6561
7	—0,8	0,64	—0,512	0,4096
8	—0,8	0,64	—0,512	0,4096
9	—0,7	0,49	—0,343	0,2401
10	1,4	1,96	2,744	3,8416
$\sum_{i=1}^{10}$	0,1	12,37	10,765	38,6677

* Отклонения от среднего арифметического значения называются «центральными».

Наконец, по формуле (2.3.2е) и $\sum_{i=1}^{10} \lg x_i$ из табл. 2.3.2, потенцируя результат, определяем среднее геометрическое:

$$G = \text{antilog}\left\{\frac{1}{10} \cdot 5{,}3813\right\} \approx 3{,}45 \ (1/\textit{сек}).$$

Можно видеть, что действительно средние значения различаются между собой, и, если поместить среднее геометрическое между средним гармоническим и средним арифметическим, то отношение порядка будет соответствовать указанному неравенствами (2.2.12б). После того как будут вычислены оценки для мер рассеивания, мы еще раз вычислим все средние, пользуясь равенством (2.3.3).

Характеризуя рассеивание значений скорости записывания цифр человеком, вычислим сначала среднее абсолютное отклонение. Для этого, не обращая внимания на знаки, заново суммируем отклонения от среднего арифметического во втором столбце табл. 2.3.3.

$$\delta = \frac{9{,}1}{10} = 0{,}91.$$

Здесь необходимо обратить внимание на то, что алгебраическая сумма второго столбца в табл. 2.3.3, составляющая 0,1, пренебрежимо мала как по сравнению с суммой x_i, так и по сравнению

с суммой $|x_i|$. Теоретически, как мы покажем ниже, должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - M) \equiv 0.$$

Но практически, из-за округлений, это равенство становится приближенным, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - M) \approx \varepsilon,$$

где ε — величина «второго порядка малости» (в десятки раз меньше, чем $\sum_i x_i$ и $\sum_i |x_i - M|$).

Нетрудно убедиться в том, что, если бы в примере центральные отклонения вычислялись при M = 3,61, а не при округлении с недостатком (M ≈ 3,6), что значительно упростило расчеты в табл. 2.3.3, то равенство суммы центральных отклонений нулю выполнялось бы точно.

Вычислим, далее, оценку дисперсии двумя способами. По формуле (2.2.18), используя полученные выше значения среднего арифметического и среднего квадратического, имеем

$$D = 14,269 - 13,032 = 1,237.$$

Подставляя сумму третьего столбца из табл. 2.3.3 в формулу (2.3.5), получаем тот же результат:

$$D = \frac{1}{10} \cdot 12,37 = 1,237,$$

следовательно, дисперсия вычислена без ошибки.

По формуле (2.2.16) определяем оценку стандартного отклонения:

$$\sigma = |\sqrt{1,237}| \cong 1,11.$$

Можем теперь сравнить оценки δ и σ по приближенному равенству (2.2.18a); действительно:

$$\frac{0,91}{1,11} \approx 0,8.$$

Далее определим отношение $\frac{D}{M}$ и по приближенному равенству (2.3.3) вычислим заново оценки остальных степенных средних:

$$\frac{D}{M} = \frac{1,237}{3,61} \approx 0,34,$$

$$H = 3,61 + \frac{-1-1}{2} \cdot 0,34 \approx 3,27,$$

$$G = 3,61 - 0,5 \cdot 0,34 \approx 3,44,$$

$$S = 3,61 + 0,5 \cdot 0,34 \approx 3,78,$$

$$\theta = 3,61 + 0,34 \approx 3,95,$$

$$Q = 3,61 + 0,75 \cdot 0,34 \approx 4,12.$$

Сопоставим полученные оценки с результатами непосредственных расчетов в табл. 2.3.4.

Таблица 2.3.4

Сопоставление результатов вычисления средних двумя способами

Вид среднего значения	Вычислено		Ошибка	
	Непосредственно	через посредство M, по формуле (2.3.3)	абсолютная	В %% к величине, вычисленной непосредственно
H	3,31	3,27	0,04	1,2
G	3,45	3,44	0,01	0,3
M	3,61	—	—	—
S	3,78	3,78	—	—
θ	3,95	3,95	—	—
Q	4,11	4,12	0,01	0,2

Можно видеть, что использование равенства (2.3.3) не внесло существенной погрешности в оценки разных средних.

Сравнивая оценки значений средних разного вида, в частности оценку M = 3,61 (1/*сек*) и оценку H = 3,34 (1/*сек*), необходимо отметить следующее. Как указывалось, для усреднения скоростей следует использовать среднее гармоническое. Но если разница между H и M не велика (допустима, по мнению исследователя), то можно заменить H на M. В данном случае эта разница составляет несколько менее 10%, и в первом приближении ею можно пренебречь.

Основываясь на среднем арифметическом значении в качестве центра рассеивания, вычислим двумя способами оценки для мер асимметрии и эксцесса.

Оценку для коэффициента асимметрии получим по формулам (2.3.6) и (2.3.8), подставляя в них значения из табл. 2.3.4 и 2.3.3 соответственно:

$$As = \frac{1}{1,3731} \cdot (61,48 - 3 \cdot 14,27 \cdot 3,61 + 2 \cdot 47,05) \approx \frac{1,04}{1,3731} \approx 0,76,$$

$$As = \frac{1}{13,731} \cdot 10,765 \approx 0,78.$$

Точно так же, оценку для коэффициента эксцесса получаем по формулам (2.3.7) и (2.3.9) и тем же табл. 2.3.4 и 2.3.3

$$Ex = \frac{1}{1,53} \cdot (285,39 - 4 \cdot 61,48 \cdot 3,61 + 6 \cdot 14,269 \cdot 13,032 -$$

$$- 3 \cdot 169,833) - 3 \approx \frac{3,84}{1,53} - 3 \approx -0,49,$$

$$Ex = \frac{1}{1,53 \cdot 10} \cdot 38,6677 \approx -0,47.$$

Легко видеть, что оба способа приводят к одинаковым результатам с ошибкой менее 5%.

Отметим, заканчивая пример, что рассматриваемая совокупность скоростей записывания цифр имеет небольшую положительную асимметрию и незначительный отрицательный эксцесс. Учитывая погрешность центрирования ($\varepsilon = 0,1$), можно практически считать совокупность симметричной и нормально выпуклой.

2.3.2. Группировка данных и получение эмпирической функции распределения

В большинстве психологических приложений статистики основной целью группировки экспериментальных данных является получение эмпирических функций распределения, после чего уже по распределению вычисляются числовые характеристики. В отдельных случаях целью группировки является только расчет числовых характеристик.

Получить эмпирические функции распределения можно, лишь оценив вероятности появления значений случайной величины. А для этого необходимо, чтобы массив группируемых данных имел объем *

$$N > 80 \div 100. \qquad (2.3.10)$$

Для того чтобы функция распределения, полученная в результате группировки экспериментальных данных, наилучшим образом соответствовала тому, что имеет место в действительности, необходимо учитывать, с дискретной или непрерывной случайной величиной мы имеем дело, большое или малое количество разных значений случайной величины получено в опыте, значительно или незначительно различаются частоты «соседних» по величине значений и многое другое. В этой связи рассмотрим два способа и три принципа группировки экспериментальных данных.

Первый способ группировки состоит в выборе интервала квантования λ, границ x_i, и средних значений w_i интервалов группировки, аналогично тому, как это было изложено для ранжированной переменной. Причем для дискретной случайной величины интервал группировки определяется уравнением (1.4.2), которое здесь можно переписать в виде

$$\lambda = \text{ant}\left\{\frac{x_{\max} - x_{\min}}{8 \div 12}\right\}, \qquad (2.3.11)$$

где $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — минимальное и максимальное из наблюдавшихся значений дискретной случайной величины, а в знаменателе дано количество интервалов (8—12), принятое для группировки.

---

* В отдельных случаях оценить функцию распределения можно при $N > 50 \div 80$.

Для квантованной непрерывной случайной величины интервал группировки λ может быть любым рациональным числом. Поэтому уравнение (1.4.2) в этом случае имеет вид

$$\lambda = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{8 \div 12}. \qquad (2.3.11а)$$

Поскольку (2.3.11а) может привести к иррациональному λ, здесь тоже приходится округлять его значение до некоторого «удобного» числа. Как правило, округляют так, чтобы $\lambda \geqslant \Delta x$, где Δx — абсолютная погрешность измерения значений случайной величины X в условиях эксперимента.

Границы классов x_i и средние значения w_i интервалов выбирают, либо исходя из условия:

$$x_1 \leqslant x_{\min} \quad \text{и} \quad x_{n+1} \geqslant x_{\max} \qquad (2.3.12а)$$

и тогда

$$x_{i+1} = x_i + \lambda \qquad (2.3.12б)$$

и

$$w_i = x_i + 0{,}5 \cdot \lambda, \qquad (2.3.12в)$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1 \text{ для } x_i \quad \text{и} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \text{ для } w_i,$$

либо исходя из условия:

$$w_1 = x_{\min} \quad \text{и} \quad w_n = x_{\max} \qquad (2.3.13а)$$

и тогда

$$x_1 = w_1 - 0{,}5\lambda \qquad (2.3.13б)$$

и

$$w_{i+1} = w_i + \lambda. \qquad (2.3.13в)$$

После того как определены все границы x_i и средние значения w_i интервалов, необходимо разнести экспериментальные данные по интервалам. Так как среди наблюдавшихся значений x_i могут встретиться такие, которые численно равны значениям границ x_i, то необходимо корректно распорядиться их размещением. В этой связи существуют три принципа размещения «граничных» значений x_i.

Первый принцип основывается на условии

$$x_i \leqslant X < x_{i+1}, \qquad (2.3.14а)$$

т. е. каждый интервал группировки считается открытым справа.

Второй принцип основывается на условии

$$x_i < X \leqslant x_{i+1}, \qquad (2.3.14б)$$

т. е. каждый интервал группировки считается открытым слева.

Наконец, третий принцип основан на условии

$$x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1}, \qquad (2.3.14в)$$

т. е. каждый интервал группировки замкнут слева и справа.

Различие в условиях (2.3.14) приводит к тому, что некоторое ограниченное значение $x_j = x_i$, согласно первому принципу относится в интервал λ_{i+1} (см. рис. 2.3.1), согласно второму — в интервал λ_i, а согласно третьему — размещается *между* интервалами, непосредственно на границе x_i.

Необходимо отметить, что на практике чаще всего используются первый и второй принципы, поскольку так легче выполнять группировку. Однако нетрудно показать, что оба эти принципа *ведут к смещению* эмпирического распределения в сторону от его истинного положения на числовой оси X: первый принцип дает смещение вправо, а второй — влево. Величина смещения положительно зависит от количества «граничных» значений среди экспериментальных данных и от величины интервала группировки. Конечно, появление «граничных» значений x_j обусловлено тем, как выбраны границы x_i. Поэтому всегда следует попытаться, выбирая границы x_i интервалов группировки, минимизировать число появляющихся «граничных» значений в массиве экспериментальных данных. Все-таки обычно не удается избежать их появления, а величину смещения нельзя априори установить. Поэтому лучше при группировке данных вручную * использовать третий принцип.

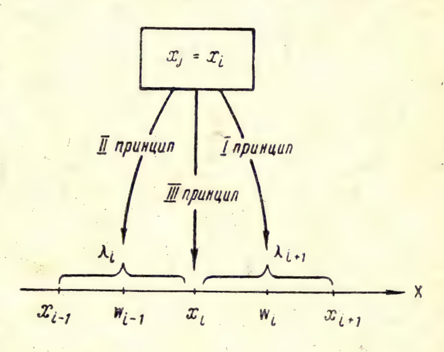


Рис. 2.3.1. Схема, поясняющая три принципа размещения «граничных» значений x_j квантованной случайной величины X.

Пример 2.3.2. В опыте по изучению амплитудно-частотной характеристики руки человека-оператора для одного из испытуемых получены значения амплитуд установившихся колебаний руки (табл. 2.3.5). Требуется определить эмпирическую функцию распределения.

Осуществим группировку данных по первому способу. Для этого из табл. 2.3.5 определим значения

$$x_{\min} = 41 \text{ мм} \quad \text{и} \quad x_{\max} = 82 \text{ мм}.$$

Тогда по уравнению (2.3.11а):

$$\lambda = \frac{82 - 41}{10} = 4{,}1 \text{ мм}.$$

Так как измерения амплитуды проводились с абсолютной ошибкой $\pm 0{,}5$ *мм*, т. е. — с точностью до 1 *мм*, округлим значение λ

---

* При использовании автоматической группировки приходится пренебречь смещением и использовать первый или второй принципы размещения «граничных» значений регистрируемой случайной величины.

Таблица 2.3.5

Значения x_j амплитуды установившихся колебаний руки испытуемого, *мм*

1	2	3	4	5	6	7	8
64	62	63	65	70	52	62	49
72	52	55	70	64	66	65	59
60	68	61	65	63	60	66	48
67	72	45	58	65	75	55	52
63	63	46	52	70	66	68	54
65	66	64	56	65	67	62	42
60	62	72	55	56	61	67	57
75	67	70	60	58	70	57	51
51	60	70	54	56	64	62	66
80	68	63	59	65	71	62	51
65	60	63	71	62	57	62	56
62	60	62	63	73	68	60	55
73	58	62	55	62	66	57	56
62	57	68	55	60	53	60	54
71	60	69	58	63	73	58	53
63	64	71	66	68	63	62	41
55	59	58	62	64	67	58	55
56	64	60	82	60	62	52	54
64	65	64	54	71	62	62	58
61	60	70	74	61	66	61	51
65	63	73	58	62	58	61	58
69	59	52	55	55	66	67	62
65	60	59	62	51	72	60	62
68	58	54	75	44	71	53	51
58	62	64	62	73	65	50	62

с недостатком до $\lambda = 4$ *мм*. Выберем, далее, $x_1 = 40$ *мм* $< x_{\min}$ и определим по уравнению (2.3.12б) остальные границы (табл. 2.3.6); $x_{n+1} = 84$ *мм* $> x_{\max}$.

Кодируя «палочками» эмпирические значения амплитуды из табл. 2.3.5, осуществим группировку данных в соответствии с каждым из трех принципов размещения «граничных» значений x_j (табл. 2.3.6 и 2.3.7).

Так как при построении гистограммы или полигона распределения частоты f_i сопоставляются средним значениям i-тых интервалов w_i, то при использовании третьего принципа размещения «граничных» значений x_j их частоты (они отмечены «палочками» на границах в табл. 2.3.7) следует поровну распределить между соседними интервалами. Поскольку частоты «граничных» значений могут быть нечетными числами, то используется условная *дробная* оценка окончательных частот f_i, сопоставляемых значениям w_i. Сравнивая значения частот из табл. 2.3.6 и 2.3.7, можно видеть, что интервальные частоты, полученные с использованием третьего принципа — это средние из частот, полученных с использованием первого и второго принципов:

$$f_i\,(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1}) = 0{,}5\,[f_i\,(x_i \leqslant X < x_{i+1}) + f_i\,(x_i < X \leqslant x_{i+1})].$$

Таблица 2.3.6

Группировка данных, согласно первому и второму принципам размещения «граничных» значений.

Первый принцип ($x_i \leqslant X < x_{i+1}$)			Второй принцип ($x_i < X \leqslant x_{i+1}$)		
$x_i \div x_{i+1}$ (*мм*)	Кодирование	f_i	$x_i \div x_{i+1}$ (*мм*)	Кодирование	f_i
40 ÷ 44	II	2	40 ÷ 44	III	3
44 ÷ 48	III	3	44 ÷ 48	III	3
48 ÷ 52	卌 IIII	9	48 ÷ 52	卌 卌 IIII	14
52 ÷ 56	卌 卌 卌 卌 卌	25	52 ÷ 56	卌 卌 卌 卌 卌	25
56 ÷ 60	卌 卌 卌 卌 卌 IIII	29	56 ÷ 60	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 IIII	39
60 ÷ 64	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 III	58	60 ÷ 64	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 II	52
64 ÷ 68	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 II	37	64 ÷ 68	卌 卌 卌 卌 卌 卌 IIII	34
68 ÷ 72	卌 卌 卌 卌 II	22	68 ÷ 72	卌 卌 卌 IIII	19
72 ÷ 76	卌 卌 III	13	72 ÷ 76	卌 IIII	9
76 ÷ 80		0	76 ÷ 80	I	1
80 ÷ 84	II	2	80 ÷ 84	I	1
Сумма		200	Сумма		200

После того как частоты определены, следует вычислить частости p_i. Для этого необходимо определить объем совокупности после группировки (N′):

$$N' = \sum_{i=1}^{k} f_i, \tag{2.3.15}$$

где k — количество интервалов группировки, и затем вычислить частости

$$p_i = \frac{f_i}{N'}. \tag{2.3.16}$$

Дело в том, что при значительном количестве экспериментальных данных (несколько сотен и более), в процессе их разнесения по интервалам отдельные значения — обычно из числа частых — могут быть случайно пропущены или закодированы дважды. Повторное разнесение данных не изменяет положения, так как допускаются

Таблица 2.3.7

Группировка данных, согласно третьему принципу размещения «граничных» значений

<table>
<tr><th colspan="3">Третий принцип ($x_i < X < x_{i+1}$)</th></tr>
<tr><th>$x_i \div x_{i+1}$ (*мм*)</th><th>Кодирование</th><th>f_i</th></tr>
<tr><td>40 ÷ 44</td><td>$||$</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$|$</td><td></td></tr>
<tr><td>44 ÷ 48</td><td>$||$</td><td>3,0</td></tr>
<tr><td></td><td>$|$</td><td></td></tr>
<tr><td>48 ÷ 52</td><td>$\overline{||||}\ |||$</td><td>11,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$\overline{||||}\ |$</td><td></td></tr>
<tr><td>52 ÷ 56</td><td>$\overline{||||}\ \underline{||||}\ \overline{||||}\ ||||$</td><td>25,0</td></tr>
<tr><td></td><td>$\underline{||||}\ |$</td><td></td></tr>
<tr><td>56 ÷ 60</td><td>$\underline{||||}\ \overline{||||}\ \underline{||||}\ \overline{||||}\ ||||$</td><td>34,0</td></tr>
<tr><td></td><td>$\underline{||||}\ \overline{||||}\ \underline{||||}\ |$</td><td></td></tr>
<tr><td>60 ÷ 64</td><td>$\underline{||||}\ \overline{||||}\ \underline{||||}\ \overline{||||}\ \underline{||||}\ \overline{||||}\ \underline{||||}\ \overline{||||}\ ||$</td><td>55,0</td></tr>
<tr><td></td><td>$\overline{||||}\ \underline{||||}$</td><td></td></tr>
<tr><td>64 ÷ 68</td><td>$\underline{||||}\ \overline{||||}\ \underline{||||}\ \overline{||||}\ \underline{||||}\ ||$</td><td>35,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$\underline{||||}\ ||$</td><td></td></tr>
<tr><td>68 ÷ 72</td><td>$\overline{||||}\ \underline{||||}\ \overline{||||}$</td><td>20,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$||||$</td><td></td></tr>
<tr><td>72 ÷ 76</td><td>$\overline{||||}\ ||||$</td><td>11,0</td></tr>
<tr><td>76 ÷ 80</td><td></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$|$</td><td></td></tr>
<tr><td>80 ÷ 84</td><td>$|$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сумма . . . .</td><td>200,0</td></tr>
</table>

новые ошибки. Сами по себе ошибки такого рода (1—2%) не влияют на полученное распределение. Но, поскольку $N' \neq N$, а требуется, чтобы $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$, частости вычисляются здесь по формуле (2.3.16).

Частости распределения к примеру 2.3.2 приведены в табл. 2.3.8, а соответствующие полигоны — на рис. 2.3.2.

Эмпирическое распределение, полученное в результате группировки, наилучшим образом соответствует экспериментальным данным тогда, когда среднее арифметическое значение, вычисленное по распределению, почти не отличается от вычисленного по несгруппированным данным. Это обусловлено тем, что при группировке фактически наблюдавшиеся значения x_j изучаемой случайной величины X заменяются средними значениями w_i интер-

Таблица 2.3.8

Частости эмпирического распределения значений амплитуды установившихся колебаний руки испытуемого по данным примера 2.3.2

i	$x_i \div x_{i+1}$, *мм*	W_i, *мм*	Принципы размещения «граничных» значений		
			$P_i(x_i < X < < x_{i+1})$	$P_i(x_i < X \leqslant x_{i+1})$	$P_i(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1})$
1	$40 \div 44$	42	0,010	0,015	0,0125
2	$44 \div 48$	46	0,015	0,015	0,0150
3	$48 \div 52$	50	0,045	0,070	0,0575
4	$52 \div 56$	54	0,125	0,125	0,1250
5	$56 \div 60$	58	0,145	0,195	0,1700
6	$60 \div 64$	62	290	0,260	0,2750
7	$64 \div 68$	66	0,185	0,170	0,1775
8	$68 \div 72$	70	0,110	0,095	0,1025
9	$72 \div 76$	74	0,065	0,045	0,0550
10	$76 \div 80$	78	0,000	0,005	0,0025
11	$80 \div 84$	82	0,010	0,005	0,0075
Суммы			1,000	1,000	1,0000

валов группировки, и интервалы должны быть выбраны таким образом, чтобы среднее значение одного из них было совмещено со средним арифметическим значением наблюдавшейся совокупности. Первый способ группировки, рассмотренный выше, не позволяет априори оценить среднее значение интервала, наиболее

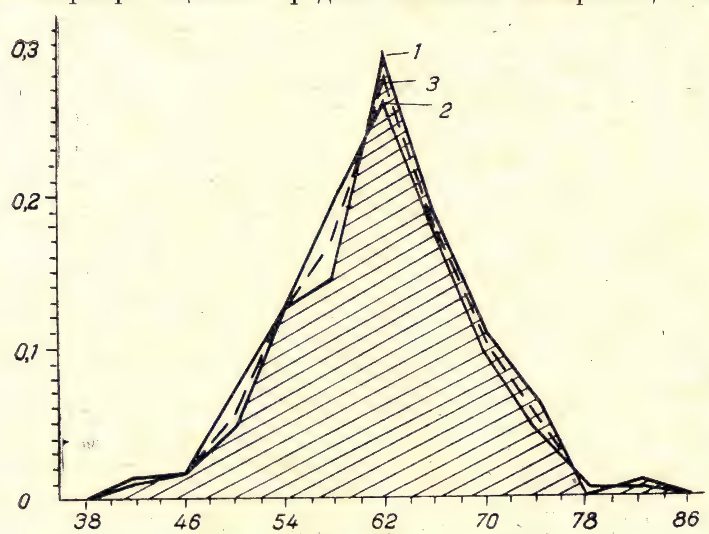


Рис. 2.3.2. Полигон распределения значений амплитуды по данным примера 2.3.2.

По оси абсцисс — амплитуда колебаний, *мм*, по оси ординат — частости. Разновидности полигона *1*, *2* и *3* получены в результате использования разных принципов размещения «граничных» значений (первого, второго и третьего соответственно).

близкое к желаемому. В этой связи рассмотрим второй способ группировки экспериментальных данных, более трудоемкий, но зато гарантирующий лучшие результаты.

Второй способ группировки можно представить в виде следующей процедуры.

1. Из массива экспериментальных данных определим минимальное ($x_{\min}$) и максимальное ($x_{\max}$) значения.

2. Полагая, что все наблюдавшиеся значения x получены в результате равноточных измерений, с точностью Δx *, запишем возрастающий ряд из k возможных значений:

$$x_{\min};\ x_{\min}+\Delta x;\ x_{\min}+2\,\Delta x;\ \ldots;\ x_{\min}+(k-2)\,\Delta x;\ x_{\max}, \qquad (2.3.17)$$

где $x_{\max}=x_{\min}+(k-1)\,\Delta x$ и k — натуральное число. Отметим, что некоторые из возможных значений x_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$) среди экспериментальных данных могут случайно отсутствовать. Отметим также, что k эквивалентно количеству интервалов группировки величиной Δx:

$$k=\frac{1}{\Delta x}(x_{\max}-x_{\min})+1 \qquad (2.3.18)$$

и требуется, чтобы $N \gg k$, иначе группировка может не иметь смысла. Отметим, наконец, что при большом N высокоточных измерений (Δx мало) k оказывается столь большим (несколько сотен и более), что второй способ группировки неприменим и следует воспользоваться первым способом.

3. Последовательно просматриваем массив экспериментальных данных, и, кодируя их «палочками», как и прежде, подсчитываем, сколько раз фактически встречается каждое из k возможных значений x_j; таким образом определяем частоты $f_j(x_j)$. Очевидно, некоторые из возможных значений фактически могут и не встретиться и соответствующие частоты окажутся тождественно равными нулю. Далее, в зависимости от ряда условий, возможны следующие варианты.

Вариант 1. Для целей исследования можно ограничиться расчетом числовых характеристик; тогда группировка закончена. Если же необходимо прежде всего определить эмпирическую функцию распределения, то следует учесть, получен ли при данном k непрерывный и «достаточно гладкий» ряд частот $f_j(x_j)$.

Вариант 2. При $k = 8 \div 12$ и более из числа возможных значений x_j фактически наблюдались все **, и частоты $f_j(x_j)$, будучи изображены на графике, образуют «достаточно гладкую» последовательность (рис. 2.3.2). В таком случае остается, используя формулы (2.3.15) и (2.3.16), вычислить значения частостей p_j

---

* Если измерения были неравноточными, то за Δx принимается удвоенная абсолютная, либо стандартная погрешность наименее точного измерения.

** Для одного-двух значений на краях ряда допустимо $f_j(x_j)\equiv 0$.

Сопоставляя частости p_j и значения x_j, для дискретной случайной величины X можно получить эмпирический ряд распределения, а для квантованной случайной величины можем построить полигон или гистограмму, пользуясь методами, изложенными выше.

Вариант 3. При $k \geqslant 12$ для некоторых значений x_j в середине ряда получены «нулевые», либо низкие значения частот, т. е. последовательность частот либо прерывиста, либо «пилообразна» (либо и то и другое вместе). Тогда необходимо продолжить группировку, *укрупняя* интервалы Δx.

Новый, укрупненный интервал (λ) выбирается, исходя из соотношения

$$\lambda = u \cdot \Delta x. \tag{2.3.19}$$

Здесь $u \geqslant 2$ — натуральное число, которое определяется из условия

$$u = \frac{k}{z},$$

где $z = 8 \div 12$; иногда допустимо $z = 7$.

Далее, необходимо выбрать «начало отсчета» — среднее значение интервала, наиболее близкое по величине среднему арифметическому значению, вычисленному по несгруппированным данным.

Наилучший, хотя и самый длинный путь — это непосредственный расчет среднего арифметического значения по методу «взвешенной средней»:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{k} f_j} \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot f_j, \tag{2.3.20}$$

где x_j — возможные значения измерявшейся в эксперименте случайной величины X; k — количество таких значений; $\sum\limits_{j=1}^{k} f_j = N'$ — количество экспериментальных данных, фактически сгруппированных для получения частот f_j. Некоторые из частот могут быть равны нулю. Затем с точностью до Δx выбирают ближайшее к вычисленному по (2.3.20) М — среднее значение w_i некоторого i-того интервала, после чего, пользуясь формулами (2.3.13в) и (2.3.12в), определяют средние значения остальных интервалов и все границы x_i.

Далее осуществляется *перегруппировка частот*. Частоты, принадлежащие значениям x_j, расположенным «внутри» укрупненных интервалов λ, суммируются. Частоты «граничных» значений $x_j = x_i$ размещаются по одному из трех рассмотренных выше принципов, лучше всего — по третьему.

В случае, если ряд из k значений x_j с сопоставленными им частотами f_j *приблизительно симметричен относительно модаль-*

ного значения (например, как в табл. 2.3.9), то это модальное значение (Мо) и принимается за оценку среднего арифметического значения, которое в этом случае не нужно вычислять. Тогда принимают за «начало отсчета» среднее значение w_i, ближайшее к моде Мо.

Таблица 2.3.9

Группировка данных из таблицы 2.3.5 вторым способом

j	x_j (*мм*)	Кодирование	f_j	j	x_j(*мм*)	Кодирование	f_j
1	41	I	1	22	62	$\overline{IIII}$ $\underline{IIII}$ $\overline{IIII}$ $\underline{IIII}$ $\overline{IIII}$	25
2	42	I	1	23	63	$\underline{IIII}$ $\overline{IIII}$ I	11
3	43		0	24	64	$\overline{IIII}$ $\underline{IIII}$	10
4	44	I	1	25	65	$\overline{IIII}$ $\underline{IIII}$ II	12
5	45	I	1	26	66	$\overline{IIII}$ IIII	9
6	46	I	1	27	67	$\underline{IIII}$ I	6
7	47		0	28	68	$\overline{IIII}$ II	7
8	48	I	1	29	69	II	2
9	49	I	1	30	70	$\overline{IIII}$ II	7
10	50	I	1	31	71	$\overline{IIII}$ I	6
11	51	$\overline{IIII}$ I	6	32	72	IIII	4
12	52	$\overline{IIII}$ I	6	33	73	$\overline{IIII}$	5
13	53	III	3	34	74	I	1
14	54	$\overline{IIII}$ I	6	35	75	III	3
15	55	$\overline{IIII}$ $\underline{IIII}$	10	36	76		0
16	56	$\overline{IIII}$ I	6	37	77		0
17	57	$\overline{IIII}$	5	38	78		0
18	58	$\overline{IIII}$ $\underline{IIII}$ III	13	39	79		0
19	59	$\overline{IIII}$	5	40	80	I	1
20	60	$\overline{IIII}$ $\underline{IIII}$ $\overline{IIII}$ I	16	41	81		0
21	61	$\overline{IIII}$ I	6	42	82	I	1
						Сумма частот	200

Примечание. $j=1, 2, \ldots, k$ — номер возможного значения x_j случайной величины X. Поскольку фактически наблюдались не все x_j, некоторые частоты $f_j=0$.

Пример 2.3.3. По данным предыдущего примера 2.3.2 осуществить группировку вторым способом; вычислить «взвешенное» среднее арифметическое значение.

Так как значения амплитуды определены с точностью до 1 *мм*, т. е. $\Delta x = 1$ *мм*, по формуле (2.3.18) устанавливаем, что коли-

чество возможных значений (x_j) амплитуды при $x_{min} = 41$ *мм* и $x_{max} = 82$ *мм* составляет $k = 42$. Используя (2.3.17), строим ряд возможных значений x_j, этот ряд представлен в табл. 2.3.9. Кодируя как обычно «палочками» значения амплитуд из табл. 2.3.5, подсчитываем частоты f_j возможных значений x_j; они также приведены в табл. 2.3.9.

Поскольку $k \gg 12$, а последовательность частот в табл. 2.3.9 прерывна и «пилообразна», можем, согласно варианту 3, укрупнить интервалы Δx. По соотношению (2.3.19) выберем новый интервал группировки

$$\lambda = \frac{k}{z} \Delta x \text{ (мм)},$$

где $\Delta x = 1$ *мм*, $k = 42$, а z примем равным десяти, поэтому $\text{ant}\left\{\frac{k}{z}\right\} = 4$ и, следовательно, $\lambda = 4$ *мм*.

Теперь для построения *основания* ряда распределения амплитуд необходимо выбрать в качестве «начала отсчета» одно из средних значений w_i интервалов, наиболее близкое (с точностью до Δx) к среднему арифметическому значению несгруппированных данных. Так как взвешенное среднее арифметическое значение, определенное по формуле (2.3.20), в точности равно среднему арифметическому значению, вычисленному по формуле (2.3.2б), то определим взвешенное среднее арифметическое, вычисляя, как показано в табл. 2.3.10. Разделив сумму произведений $x_j f_j$ на сумму частот (200), получаем

$$\text{M}[x_j] = \frac{12\,315}{200} = 61{,}575 \text{ (мм)}.$$

Сопоставляя среднее арифметическое значение с модальным значением из табл. 2.3.9, видим, что различие между ними практически отсутствует. Этого следовало ожидать, так как ряд распределения в табл. 2.3.9 почти симметричен ($62 - 41 \approx 82 - 62$). Следовательно, можно было бы выбрать за «начало отсчета» моду, полагая $w_i = 62$ и далее: $x_i = w_i - 0{,}5\lambda = 60$, $x_{i+1} = w_i + 0{,}5\lambda = 64$, а затем, вычислив по уравнениям (2.3.12б) и (2.3.13в) остальные x_i и w_i, построить то основание ряда распределения амплитуд, которое и было использовано в примере 2.3.2. Но можно, округлив среднее арифметическое значение с недостатком до 61,5 *мм* * принять его за «начало отсчета», положив: $w_i = 61{,}5$, $x_i = 61{,}5 - 2 = 59{,}5$ и $x_{i+1} = 61{,}5 + 2 = 63{,}5$. После этого по уравнениям (2.3.12б) и (2.3.13в) определяют границы и середины интервалов, приведенные в табл. 2.3.11. Там же указаны частоты f_i, полученные суммированием частот f_j из табл. 2.3.9, относящихся к значениям x_j, заключенным внутри укрупненных

* Такое округление не лишено смысла, если учесть, как указывалось, что измерения проводились с абсолютной ошибкой $\pm 0{,}5$ *мм*.

Таблица 2.3.10

Промежуточные результаты к вычислению среднего арифметического значения по (2.3.20)

1			2			3		
x_j, мм	f_j	$x_j f_j$	x_j, мм	f_j	$x_j f_j$	x_j, мм	f_j	$x_j f_j$
41	1	41	55	10	550	69	2	138
42	1	42	56	6	336	70	7	490
43	0	0	57	5	285	71	6	426
44	1	44	58	13	754	72	4	288
45	1	45	59	5	295	73	5	365
46	1	46	60	16	960	74	1	74
47	0	0	61	6	366	75	3	225
48	1	48	62	25	1550	76	0	0
49	1	49	63	11	693	77	0	0
50	1	50	64	10	640	78	0	0
51	6	306	65	12	780	79	0	0
52	6	312	66	9	594	80	1	80
53	3	159	67	6	402	81	0	0
54	6	324	68	7	476	82	1	82
Сумма (по j) произведений $x_j f_j$								12315

Таблица 2.3.11

Результаты группировки значений амплитуды (из табл. 2.3.5) по второму способу при укрупнении интервала группировки

	$x_i \div x_{i+1}$	w_i	f_i	p_i
1	39,5 ÷ 43,5	41,5	2	0,010
2	43,5 ÷ 47,5	45,5	3	0,015
3	47,5 ÷ 51,5	49,5	9	0,045
4	51,5 ÷ 55,5	53,5	25	0,125
5	55,5 ÷ 59,5	57,5	29	0,145
6	59,5 ÷ 63,5	61,5	58	0,290
7	63,5 ÷ 67,5	65,5	37	0,185
8	67,5 ÷ 71,5	69,5	22	0,110
9	71,5 ÷ 75,5	73,5	13	0,065
10	75,5 ÷ 79,5	77,5	0	0,000
11	79,5 ÷ 83,5	81,5	2	0,010
Суммы			200	1,000

Примечание. Заметим, что частости p_i численно равны частостям p_i $(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1})$ из табл. 2.3.8, но сопоставлены они здесь средним значениям интервалов, сдвинутых влево на $0{,}5\,\Delta x$ по сравнению со средними интервалов в табл. 2.3.8. Этим и компенсируется противоположно направленное (вправо) смещение положения ряда, обусловленное использованием первого принципа размещения «граничных» значений.

интервалов λ. Далее по формуле (2.3.16) определяют частости p_i, они тоже приведены в табл. 2.3.11.

После изложения методов расчета числовых характеристик по распределению, мы покажем, что и при $w_i = 62$ и при $w_i = 61{,}5$ числовые характеристики положения и рассеивания, вычисленные по частостям $p_i\ (x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1})$ из табл. 2.3.8 и по частостям p_i из табл. 2.3.11, совпадают в пределах точности измерений.

Необходимо заметить, что частости p_i в табл. 2.3.11 определены вне действия трех принципов размещения «граничных» значений, которые при выборе $w_i = 61{,}5 \approx \mathrm{M}\ [x_j]$ отсутствуют. Но, если бы, например, $\mathrm{M}\ [x_j] = 62$, то для получения несмещенных оценок параметров нужно было бы использовать третий принцип размещения «граничных» значений.

Пример 2.3.4. В экспериментах по изучению точности подравнивания человеком яркости объекта под эталонную яркость на серийном фотометре ФМ-58И в одной из серий опытов получены 100 значений модуля ошибки подравнивания, которые представлены в табл. 2.3.12 (Ошибка подравнивания определялась по

Таблица 2.3.12

Исходные данные к примеру 2.3.4 — — значения модуля ошибки подравнивания яркости в %

1	2	3	4	5
0,3	0,7	0,2	0,4	0,1
0,9	0,0	0,1	0,2	0,7
0,7	0,6	0,3	0,3	0,5
0,4	0,6	0,1	0,1	0,4
0,4	0,7	0,8	0,2	0,2
0,5	0,3	0,5	0,3	1,1
0,1	0,8	0,4	0,3	0,2
0,5	1,2	0,5	1,2	0,3
0,1	0,1	0,3	0,4	0,1
0,0	0,4	0,3	0,4	0,1
0,0	0,3	0,9	0,4	0,2
0,3	0,3	1,1	0,3	0,0
1,4	0,2	0,9	0,4	0,4
0,6	0,4	0,2	0,4	0,3
0,3	0,3	0,3	0,1	0,0
0,1	1,0	0 8	0,4	0,7
0,5	0,2	0,3	0,3	0,3
0,3	0,4	0,1	0,4	0,4
1,1	0,2	0,1	1,0	0,3
0,4	0,4	0,1	0,4	0,2

Примечание. Абсолютная погрешность считывания значений ошибки со шкалы барабана может быть принята $\pm 0{,}05\%$, следовательно, точность измерений определяется величиной $\Delta x = 0{,}1\%$.

шкале регулировочного барабана, в процентах от величины эталонной яркости). Осуществим группировку данных по второму способу.

Пятнадцать (k) возможных значений ошибки подравнивания, взятой по модулю (x_j), представлены в табл. 2.3.13. Там же осуществлено кодирование данных, подсчет частот и вычисление среднего арифметического значения модуля ошибки М [x_j].

Таблица 2.3.13

Группировка значений ошибки подравнивания по второму способу и вычисление «взвешенного» среднего арифметического значения

j	x_j, (%)	Кодирование	f_j	$x_j f_j$
1	0,0	𝍸	5	0,0
2	0,1	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	14	1,4
3	0,2	𝍸 𝍸 𝍷	11	2,2
4	0,3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷	22	6,6
5	0,4	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20	8,0
6	0,5	𝍸 𝍷	6	3,0
7	0,6	𝍷𝍷𝍷	3	1,8
8	0,7	𝍸	5	3,5
9	0,8	𝍷𝍷𝍷	3	2,4
10	0,9	𝍷𝍷𝍷	3	2,7
11	1,0	𝍷𝍷	2	2,0
12	1,1	𝍷𝍷𝍷	3	3,3
13	1,2	𝍷𝍷	2	2,4
14	1,3		0	0,0
15	1,4	𝍷	1	1,4
Суммы			100	40,7

Среднее арифметическое значение М [x_j] = 0,407.

Так как ряд частот f_j имеет «пилообразную» форму (табл. 2.3.12), то можно укрупнить интервалы вдвое:

$$\lambda = \frac{k}{z}\Delta x = \frac{15}{8} 0,1 \approx 0,2 \ (\%).$$

Можно видеть, что модальное значение $x_j = 0,3\%$ более чем на Δx отличается от среднего арифметического значения. Поэтому для центрирования данного асимметричного ряда распределения выберем

$$w_i \approx \mathrm{M}[x_j] \approx 0,4 \ (\%).$$

Тогда $w_i = 0,4 - 0,2 = 0,2$ и $w_{i+1} = 0,6$. Далее по уравнениям (2.3.12б) и (2.3.13в) определим все остальные границы x_i и середины интервалов w_i, они приведены в табл. 2.3.14. Заметим, что возникает трудность с определением границы x_1: ведь модуль всегда положителен. В этой связи приходится принять «нулевой» интервал вдвое меньшим, чем все остальные ($\lambda_1 = \Delta x = 0,5\lambda_i$, при $i = 2, 3, \ldots, n$), однако значение частоты f_1 необходимо сопоставлять не среднему значению этого интервала, а его левой границе, т. е. $x_1 = 0$ *.

Таблица 2.3.14

Результаты группировки значений ошибок подравнивания при укрупнении интервалов группировки

$x_i \div x_{i+1}$	w_i	f_i	$w_i f_i$
0,0 ÷ 0,1	0,0	12	0,0
0,1 ÷ 0,3	0,2	29	5,8
0,3 ÷ 0,5	0,4	34	13,6
0,5 ÷ 0,7	0,6	8,5	5,1
0,7 ÷ 0,9	0,8	7	5,6
0,9 ÷ 1,1	1,0	5	5,0
1,1 ÷ 1,3	1,2	3,5	4,2
1,3 ÷ 1,5	1,4	1	1,4
Суммы		100	40,7

Примечание. Принято, что $w_1 \equiv x_1$.

При определении частот f_i для укрупненных интервалов используем третий принцип размещения «граничных» значений

* Дело в том, что положительные и отрицательные значения ошибки подравнивания, имеющие модуль $0 \leqslant x_j \leqslant 0,1$, теоретически равновероятно должны распределяться относительно нулевого значения.

случайной величины. Следовательно, новые частоты f_i могут быть определены равенством:

$$f_i(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1}) = \sum_j f_j(x_i < x_j < x_{i+1}) + 0{,}5 f_j(x_j = x_i) + \\ + 0{,}5 f_j(x_j = x_{i+1}), \qquad (2.3.21)$$

где $\sum_j f_j(x_i < x_j < x_{i+1})$ — сумма всех частот, принадлежащих значениям x_j «внутри» укрупненных интервалов, а $0{,}5 f_j(x_j = x_i)$ и $0{,}5 f_j(x_j = x_{i+1})$ — половины частот «граничных» значений.

Полученные по (2.3.21) в соответствии с данными табл. 2.3.13 новые частоты f_i представлены в табл. 2.3.14.

Чтобы проверить, хорошо ли выбрано «начало отсчета», вычислим взвешенное среднее арифметическое значение по формуле

$$\mathrm{M}[x_j] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} w_i f_i, \qquad (2.3.22)$$

где w_i — средние значения интервалов; n — количество интервалов, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Заметим, что формула (2.3.22) — это видоизмененная формула (2.3.20), в которой возможные результаты измерения x_j заменены средними значениями интервалов группировки и соответственно частоты f_j — на интервальные частоты f_i.

Вычисленное по (2.3.22) среднее арифметическое значение

$$\mathrm{M}[x_j] = \frac{40{,}7}{100} = 0{,}407$$

совпадает со значением, вычисленным ранее. Следовательно, распределение ошибок подравнивания определено без смещения положения.

Заканчивая изложение вопроса о группировке экспериментальных данных, необходимо подчеркнуть два момента.

Во-первых, несмотря на лучшие результаты, обеспечиваемые вторым способом группировки, его применение затруднительно тогда, когда k — число возможных неодинаковых значений изучаемой случайной величины составляет сотню и более (при этом обычно $N > 1000$), а сами значения получены в результате неравноточных измерений. В таком случае проще группировать по первому способу. Конечно, педантичный исследователь не пожалеет труда, чтобы осуществить группировку данных по второму способу и в этих условиях, предварительно округлив более точно измеренные значения до наименее точно измеренных и уравняв таким образом измерения по точности.

Во-вторых, несмотря на то, что в большинстве случаев предпочтительней группировать данные в равные интервалы λ_i, иногда оказывается целесообразным группировать их в неравные ин-

тервалы. Например, при левоасимметричном распределении более «мелкие» интервалы «слева», а при правоасимметричном — «справа» позволят точнее определить «фронт нарастания» кривой. Чрезвычайно распространено использование неравных интервалов при статистическом шкалировании (см. стр. 146).

2.3.3. **Вычисление мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса по эмпирическому распределению**

Эмпирический ряд распределения вероятностей значений дискретной случайной величины в качестве меры положения имеет лишь моду, значение которой, если она существует, непосредственно определяется по наибольшей частоте (или частости). В качестве меры рассеивания используется лишь размах, значение которого определяется теперь не формулой (2.2.13), а разностью:

$$d = x_{n+1} - x_1, \tag{2.3.23}$$

где x_{n+1} — последняя, а x_1 — первая границы ряда, определенные фактически наблюдавшимися, а не теоретически возможными значениями изучаемой случайной величины. Следует помнить, что размах полигона ($d_п$) всегда больше, чем размах гистограммы ($d_г$), построенной на тех же самых средних значениях интервалов w_i : ($d_п > d_г$).

Для квантованной непрерывной случайной величины все рассмотренные выше меры положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса вычисляются по любой из эмпирических форм закона распределения. Но меньше всего труда затрачивается при вычислениях по эмпирической дифференциальной функции, представленной в виде ряда средних значений равных интервалов группировки (w_i) с сопоставленными этим значениям частостями (p_i). Именно такой формой мы ограничили получение эмпирической функции распределения в результате группировки. Эта же форма, как будет показано в дальнейшем, является исходной для определения эмпирического, а затем и теоретического закона распределения в виде некоторой монотонной функции.

За исключением моды, медианы, среднего гармонического и среднего геометрического значений, а также размаха все рассмотренные выше меры вычисляются единообразно через так называемые моменты. Рассмотрим сначала исключения, а потом общие правила.

Пример 2.3.5. В ходе экспериментального изучения характеристик человека при слежении за целью получены эмпирическое распределение значений полупериодов треморовидных колебаний руки одного из мастеров спорта по стрельбе (табл. 2.3.15). Требуется вычислить по распределению оценки моды, медианы, а также среднего гармонического и среднего геометрического значений полупериодов таких колебаний.

Таблица 2.3.15

Эмпирический ряд распределения значений полупериодов треморовидных колебаний руки при слежении за целью. К примеру 2.3.5

$x_i - x_{i+1}$, *мсек*	w_i, *мсек*	p_i	$\frac{p_i}{w_i}$	$\lg w_i$	$p_i \cdot \lg w_i$
17,75 ÷ 53,25	35,5	0,1960	0,005521	1,5502	0,303839
53,25 ÷ 88,75	71,0	0,3260	0,004592	1,8513	0,603524
88,75 ÷ 124,25	106,5	0,1720	0,001615	2,0273	0,348696
124,25 ÷ 159,75	142,0	0,1170	0 000824	2,1523	0,251819
159,75 ÷ 195,25	177,5	0,0590	0,000332	2,2492	0,132703
195,25 ÷ 230,75	213,0	0,0460	0,000216	2,3284	0,107106
230,75 ÷ 266,25	248,5	0,0280	0,000113	2,3954	0,067071
266,25 ÷ 301,75	284,0	0,0240	0,000084	2,4533	0,058879
301,75 ÷ 337,25	319,5	0,0120	0,000038	2,5044	0,030053
337,25 ÷ 372,75	355,0	0,0090	0,000025	2,5502	0,022952
372,75 ÷ 408,25	390,5	0,0065	0,000017	2,5916	0,016845
408,25 ÷ 443,75	426,0	0,0045	0,000011	2,6294	0,011832
Суммы		1,0000	0,013388	—	1,955319

Примечание. $\lambda = 35{,}5$ *мсек.*

Моду вычислим по формуле (2.2.2). Начало модального класса $x_{\text{Mo}} = 53{,}25$ *мсек.* Классовый интервал $\lambda = 35{,}5$ *мсек.* Частость модального класса $p_2 = 0{,}326$, частость предшествующего класса $p_1 = 0{,}196$, а частость последующего класса $p_3 = 0{,}172$.

$$\text{Mo} = 53{,}25 + 35{,}5 \cdot \left(\frac{0{,}326 - 0{,}196}{0{,}652 - 0{,}196 - 0{,}172} \right) =$$

$$= 53{,}25 + 35{,}5 \cdot \frac{0{,}130}{0{,}284} \cong 69{,}51 \ (\textit{мсек}) \approx 70 \ \textit{мсек}.$$

Медиану вычислим по формуле (1.4.15). Начало медиального класса $A\ (Q_2) = 53{,}25$ *мсек.* Сумма частостей предшествующих классов (такой всего один) $S_{\text{A}} = 0{,}196$. Частость, соответствующая медиане, $0{,}5n = 0{,}5$. Частость медиального класса $f\ (Q_2) = 0{,}326$.

$$\text{Me} = 53{,}25 + 35{,}5 \cdot (0{,}5 - 0{,}196) \frac{1}{0{,}326} =$$

$$= 53{,}25 + \frac{10{,}792}{0{,}326} = 53{,}25 + 33{,}1 = 86{,}35 \ (\textit{мсек}) \approx 86 \ \textit{мсек}.$$

Проверяя по формуле (2.4.16), убеждаемся, что Me вычислена правильно:

$$\text{Me} = 88{,}75 - 35{,}5\,(0{,}5 - 0{,}475) \frac{1}{0{,}326} = 86{,}35 \ (\textit{мсек.})$$

Среднее гармоническое значение полупериодов колебаний вычислим по формуле (2.2.5), заменив x_i на w_i и считая, что $n = 12$ — количество интервалов группировки:

$$\frac{1}{\mathrm{H}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{w_i}.$$

Значения отношений $\frac{p_i}{w_i}$ представлены в табл. 2.3.15, там же приведена их сумма.

$$\mathrm{H}=\frac{1}{0{,}013385}\approx 74{,}7\ (\text{мсек})\approx 75\ \text{мсек}.$$

Наконец, *среднее геометрическое* значение вычислим по формуле (2.2.12а), снова заменяя x_i на w_i и считая $n = 12$ количеством интервалов группировки. Промежуточные величины $\lg w_i$ и $p_i \lg w_i$ тоже приведены в табл. 2.3.15. Суммируя от $i = 1$ до n все $p_i \lg w_i$ в последнем столбце табл. 2.3.15, получаем: 1,9553 — логарифм среднего геометрического. Потенцируя этот логарифм, находим

$$\mathrm{G}=90{,}22\ (\text{мсек})\approx 90\ \text{мсек}.$$

Рассмотрим теперь с единых позиций вычисление всех остальных мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса. Для этого введем понятие *моментов распределения*.

Для непрерывной случайной величины общая формула момента h-ей степени может быть записана следующим образом:

$$\text{Момент}_h=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^h f(x)\,dx, \tag{2.3.24}$$

где h — показатель степени (порядка) момента; x — отклонение значений случайной величины от некоторого начала отсчета; $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — границы области определения случайной величины X.

Для квантованной непрерывной случайной величины, заменяя в (2.3.24) интеграл суммой, «элементы» вероятностей $f(x)\,dx$ — вероятностями P_i появления значений x_i на конечных интервалах группировки λ_i и полагая, что x_i — это средние значения w_i интервалов, получаем общую формулу моментов, которую будем использовать для всех расчетов при обработке экспериментальных данных:

$$\text{Момент}_h=\sum_{i=1}^{n} x_i^h P_i, \tag{2.3.25}$$

где n — количество, а $i = 1, 2, \ldots, n$ — номера интервалов группировки.

Моменты различаются порядком (степенью) h и видом отклонения x_i. Степень h может принимать любые значения из неотрицательных целых чисел. Соответственно различают моменты нулевого, первого, второго, третьего и четвертого порядка, а также более высоких порядков.

По виду отклонения выделяют начальные, центральные, основные и абсолютные моменты.

Начальные моменты определяются по отклонениям значений случайной величины от некоторого начала отсчета. Часто начальные моменты непосредственно вычисляют по значениям x_i случайной величины X, полученным в результате измерения. Эти значения в сущности представляют собой отклонения от нуля измерительной шкалы. Общая формула начальных моментов совпадает по виду с формулой (2.3.25).

Придавая показателю степени h различные числовые значения, получим начальные моменты нулевого, первого и т. д. порядков. Так как эти моменты играют важнейшую роль в определении числовых характеристик случайной величины, рассмотрим их подробнее.

Нулевой начальный момент — это вероятность полной группы значений случайной величины:

$$m_0 = \sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

Первый начальный момент — это среднее арифметическое значение (см. формулу (2.2.7)):

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = \mathrm{M}. \qquad (2.3.26а)$$

Второй начальный момент — это квадрат среднего квадратического значения (см. формулу (2.2.9)):

$$m_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P_i = \mathrm{S}^2. \qquad (2.3.26б)$$

Третий начальный момент — это куб среднего кубического значения:

$$m_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 P_i = \theta^3. \qquad (2.3.26в)$$

Четвертый начальный момент — это четвертая степень среднего четвертой степени:

$$m_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 P_i = \mathrm{Q}^4. \qquad (2.3.26г)$$

Нулевой начальный момент служит для проверки правильности вычисления частостей распределения. Обычно требуется, чтобы

$$0{,}999 \leqslant \sum_{i=1}^{n} P_i \leqslant 1{,}000.$$

Первый начальный момент, как неоднократно указывалось, — это важнейшая из мер положения распределения на числовой оси. Остальные начальные моменты служат для вычисления «степенных» средних и, чаще всего, для вычисления центральных моментов.

Формулы (2.3.26а—г) далеко не всегда удобны для практических расчетов, так как значения x_i могут иметь большое количество значащих цифр, и тогда промежуточные результаты достигают астрономических величин. Для практических расчетов по распределению используются другие формулы, которые получаются из формул (2.3.26а—г) с помощью линейного преобразования значений:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= A + x'_i, \quad \text{где} \\ x'_i &= \lambda x''_i \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.27а)$$

и

$$x''_i = \frac{x_i - A}{\lambda}. \qquad (3.3.27б)$$

В уравнениях (2.3.27а—б) x_i — это средние значения интервалов группировки; λ — величина интервалов, одинаковая для всех них; A — так называемое *условное* начало, выбираемое обычно как среднее значение модального интервала *; $x'_i = x_i - A$ — это, в сущности, тоже начальное отклонение, только от условного начала отсчета; наконец, x''_i — начальное отклонение от условного начала, нормированное интервалом квантования (группировки).

Поскольку x'_i и x''_i — тоже отклонения от некоторого начала, то по ним можно вычислять начальные моменты, которые соответственно будем обозначать m'_h и m''_h. Правда, величина этих моментов зависит от выбранного начала отсчета. Но легко показать, что

$$\text{M} = m_1 = A + m'_1, \qquad (2.3.28а)$$

где

$$m'_1 = \lambda m''_1 \qquad (2.3.28б)$$

и где

$$m''_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - A}{\lambda} P_i. \qquad (2.3.28в)$$

* Вообще говоря, условное начало A может быть выбрано в пределах $x_1 \div x_{n+1}$, где угодно, однако, для уменьшения расчетов его выбирают там, где частость меньше.

Поэтому для расчета среднего арифметического значения по распределению сначала выбирают условное начало А, затем для всех средних значений интервалов x_i осуществляют преобразование (2.3.27б), после этого по формуле (2.3.28в) вычисляют m_1'', затем — по (2.3.28б) — m_1' и далее по (2.3.28а) окончательно вычисляют M.

Начальные моменты, начиная со второго, которые используются для вычисления центральных моментов, достаточно определить аналогичным путем:

$$\left.\begin{aligned} &m_2' = \lambda^2 m_2'', \\ \text{где} \quad & \\ &m_2'' = \sum_{i=1}^{n} (x_i'')^2 P_i, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.29а}$$

$$\left.\begin{aligned} &m_3' = \lambda^3 m_3'', \\ \text{где} \quad & \\ &m_3'' = \sum_{i=1}^{n} (x_i'')^3 P_i, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.29б}$$

$$\left.\begin{aligned} &m_4' = \lambda^4 m_4'', \\ \text{где} \quad & \\ &m_4'' = \sum_{i=1}^{n} (x_i'')^4 P_i. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.29в}$$

Здесь $x_i'' = \frac{x_i - A}{\lambda}$ — определяется преобразованием (2.3.27б). Такая возможность обусловлена тем, что величина центральных моментов зависит лишь от λ и не зависит от начала отсчета.

Центральные моменты определяются по так называемым *центральным* отклонениям ($\overset{\circ}{x}_i$):

$$\mu_h = \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{x}{}_i^h P_i, \tag{2.3.30}$$

где $\overset{\circ}{x} = x_i$ — M — центральное отклонение есть разность между «текущими» значениями x_i случайной величины X и ее средним арифметическим значением M.

Случайная величина $\overset{\circ}{X}$, заданная центральными отклонениями $\overset{\circ}{x}_i$, называется *центрированной* случайной величиной. Процесс вычисления центральных отклонений, эквивалентный переносу начала отсчета в точку среднего арифметического значения, называют *центрированием* случайной величины.

Нулевой центральный момент, как и все другие нулевые моменты, равен единице.

Первый центральный момент теоретически равен нулю:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \text{M}) P_i = 0. \tag{2.3.31}$$

Однако практически это равенство выполняется лишь приближенно из-за неточностей центрирования, в частности, из-за округления среднего арифметического значения до величины порядка x_i.

Второй центральный момент есть дисперсия:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M})^2 P_i = \mathrm{D}. \qquad (2.3.31а)$$

Однако чаще, как указывалось, ее вычисляют через начальные моменты:

$$\mathrm{D} = \mu_2 = m_2 - m_1^2 = \mathrm{S}^2 - \mathrm{M}^2. \qquad (2.3.31б)$$

и наиболее часто — через преобразованные начальные моменты:

$$\mathrm{D} = \mu_2 = m_2' - (m_1')^2 = \lambda^2 [m_2'' - (m_1'')^2]. \qquad (2.3.31в)$$

Аналогично, через преобразованные начальные моменты, вычисляют третий центральный момент

$$\mu_3 = m_3' - 3m_2'm_1' + 2(m_1')^3 = \lambda^3 [m_3'' - 3m_2''m_1'' + 2(m_1'')^3] \qquad (2.3.31г)$$

и четвертый центральный момент

$$\mu_4 = m_4' - 4m_3'm_1' + 6m_2'(m_1')^2 - 3(m_1')^4 =$$
$$= \lambda^4 [m_4'' - 4m_3''m_1'' + 6m_2''(m_1'')^2 - 3(m_1'')^4], \qquad (2.3.31д)$$

где значения m_1' и m_1'' определены выше формулами (2.3.28б и в), а значения m_2' и m_2'', m_3' и m_3'', m_4' и m_4'' — формулами (2.3.29а—в). Разумеется, третий и четвертый начальные моменты можно вычислять и через обычные начальные моменты m_1, m_2, m_3 и m_4, пользуясь теми же формулами (2.3.31г и д).

Основные моменты определяются по основным отклонениям. *Основными* называются центральные отклонения, нормированные стандартными отклонениями:

$$\frac{\overset{0}{x_i}}{\sigma}, \qquad (2.3.32)$$

где $\sigma = |\sqrt{\mathrm{D}}|$ — стандартное отклонение. Очевидно, что основные моменты удобнее всего выражать через центральные моменты, нормированные h-ей степенью стандартного отклонения. Наибольший интерес для нас представляют третий основной момент

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3} = \mathrm{As} \qquad (2.3.33)$$

— коэффициент асимметрии, и четвертый основной момент:

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \mathrm{Ex} - 3, \qquad (2.3.34)$$

который используется для определения коэффициента эксцесса

$$\mathrm{Ex} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{2.3.34а}$$

Учитывая формулы (2.3.28б и в), (2.3.29а—в) и (2.3.31г и д), а также то, что, как следует из (2.3.31)

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}} = \lambda \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2}, \tag{2.3.35}$$

можно записать расчетные формулы для коэффициентов асимметрии и эксцесса:

$$\mathrm{As} = \frac{m_3'' - 3m_2''m_1'' + 2\,(m_1'')^3}{[\sqrt{m_2'' - (m_1'')^2}\,]^3} \tag{2.3.36}$$

и

$$\mathrm{Ex} = \frac{m_4'' - 4m_3''m_1'' + 6m_2''\,(m_1'')^2 - 3(m_1'')^4}{[m_2'' - (m_1'')^2]^2} - 3, \tag{2.3.37}$$

где моменты m_h'' ($h = 1$, 2, 3 и 4) вычисляются по общей формуле

$$\left.\begin{aligned} m_h'' &= \sum_{i=1}^{n} (x_i'')^h P_i \\ \text{при} \quad x_i'' &= \frac{x_i - A}{\lambda} \end{aligned}\right\}. \tag{2.3.38}$$

Наконец, *абсолютные моменты* определяются по абсолютным значениям (модулям) любых отклонений, начальных, центральных или основных. В частности, для нас представляет некоторый интерес первый центральный абсолютный момент

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i - \mathrm{M}\,|\, P_i,$$

который и называется средним арифметическим отклонением (2.2.15).

Наиболее часто вычисляют среднее арифметическое значение, дисперсию и стандартное отклонение, реже к ним добавляют вычисление коэффициентов асимметрии и эксцесса. Расчет всех этих параметров по распределению осуществляется в виде последовательной процедуры, включающей преобразование (2.3.27) и вычисление различных моментов из числа только что рассмотренных. Эта последовательная процедура в наиболее удобной для вычислений форме называется *способом произведений*.* Рассмотрим его на примере.

Пример 2.3.6. По способу произведений вычислить для эмпирического ряда распределения значений полупериодов треморовид-

* Наряду со способом произведений существует и способ сумм, для использования которого требуются, однако, дополнительные пересчетные формулы.

ных колебаний руки при слежении за целью (пример 2.3.5) оценки среднего арифметического значения, дисперсии и стандартного отклонения, а также коэффициентов асимметрии и эксцесса. Исходные данные и промежуточные величины приведены в табл. 2.3.16. Рассмотрим существо вычислительной процедуры.

Таблица 2.3.16

К примеру 2.3.6. Промежуточные величины к расчету M, D, σ, As и Ex по способу произведений. $\lambda = 35{,}5$ *мсек*, $A = 71$ *мсек*

x_i (*мсек*)	p_i	x''_i	$x''_i p_i$	$(x''_i p_i)\cdot x''_i$	$[(x''_i)^2\cdot p_i]\cdot x''_i$	$[(x''_i)^3\cdot p_i]\cdot x''_i$
35,5	0,1960	—1	—0,1960	0,1960	—0,1960	0,1960
71,0	0,3260	—	—	—	—	—
106,5	0,1720	1	0,1720	0,1720	0,1720	0,1720
142,0	0,1170	2	0,2340	0,4680	0,9360	1,8720
177,5	0,0590	3	0,1770	0,5310	1,5930	4,7790
213,0	0,0460	4	0,1840	0,7360	2,9440	11,7760
248,5	0,0280	5	0,1400	0,7000	3,5000	17,5000
284,0	0,0240	6	0,1440	0,8640	5,1840	31,1040
319,5	0,0120	7	0,0840	0,5880	4,1160	28,8120
355,0	0,0090	8	0,0720	0,5760	4,6080	36,8640
390,5	0,0065	9	0,0585	0,5265	4,7385	42,6465
426,0	0,0045	10	0,0450	0,4500	4,5000	45,0000
Суммы	1,0000	—	1,1145	5,8075	32,0955	220,7215
Моменты	m_0	—	m''_1	m''_2	m''_3	m''_4
Округлено	$\lambda^2 \approx 1260$		$m''_1 \approx 1{,}11$	$m''_2 \approx 5{,}81$	$m''_3 \approx 32{,}1$	$m''_4 \approx 220{,}7$

1. Выберем условное начало по принципу

$$A \equiv x_i, \text{ если } p_i(x_i) \equiv \max p_i,$$

т. е. $A = 71$ *мсек* (табл. 2.3.16).

2. Вычислим $x''_i = \dfrac{x_i - A}{\lambda}$; очевидно, что при $x_i \equiv A$, $x''_i = 0$. Чтобы не писать нули, обычно строку условного начала прочеркивают во всех столбцах справа, начиная от столбца x''_i (см. табл. 2.3.16). Нетрудно убедиться, что при любых x_i, A и λ значения x''_i — это всегда натуральные числа, положительные в сторону возрастания значений x_i переменной X и отрицательные — в сторону убывания этих значений. Поэтому после небольшой тренировки значения x''_i уже не вычисляют, а записывают, согласно мнемоническому правилу: а) в столбце x''_i, в строке условного начала A проставить «0» или прочерк; б) если ряд средних значений x_i интервалов возрастает сверху вниз, то вверху от

прочерка проставить, соответственно, $x_i = -1, -2, -3$ и т. д., а внизу проставить $x_i'' = 1, 2, 3$ и т. д. (см. табл. 2.3.16).

3. Вычислим последовательно по всем столбцам справа от столбца x_i'' в каждой строке: а) $x_i'' p_i$, б) $(x_i'' p_i)\ x_i''$, в) $[(x_i'')^2\ p_i]\ x_i''$ и г) $[(x_i'')^3\ p_i]\ x_i''$ — отсюда и название способа: «способ произведений». Разумеется, необходимо учитывать знак отклонения x_i''. Заметим, что последовательная процедура умножения предыдущего результата на x_i'' выполняется столько раз, сколько параметров распределения требуется вычислить; для вычисления M и D — два раза, если нужен еще As, то — три, а если нужен и Ex — то, как в табл. 2.3.16, — четыре раза.

4. Суммируем результаты последовательного умножения в четырех последних столбцах — это и есть начальные моменты m_1'', m_2'', m_3'' и m_4'' соответственно. Их значения можно округлить, как показано в табл. 2.3.16.

5. Вычислим среднее арифметическое значение по формулам (2.3.28б и а):

$$m_1' = \lambda m_1'' = 35{,}5 \cdot 1{,}11 \approx 39{,}4 \ (\textit{мсек}),$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + m_1' = 71 + 39{,}4 \approx 110 \ (\textit{мсек}).$$

6. Вычислим дисперсию по формуле (2.3.31в) и стандартное отклонение — по формуле (2.3.35):

$$\mathrm{D} = \lambda^2 [m_2'' - (m_1'')^2] = 35{,}5^2 \cdot (5{,}81 - 1{,}11^2) \approx 1260 \cdot (5{,}81 - 1{,}23) =$$

$$= 1260 \cdot 4{,}58 \approx 5750{,}8 \ (\textit{мсек}^2),$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}} = \lambda \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2} \cong 35{,}5 \cdot 2{,}14 \approx 76 \ (\textit{мсек}).$$

7. Вычислим коэффициент асимметрии по формуле (2.3.36):

$$\mathrm{As} = \frac{m_3'' - 3m_2''m_1'' + 2\,(m_1'')^3}{[m_2'' - (m_1'')^2] \cdot \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2}} = \frac{32{,}1 - 3 \cdot 5{,}81 \cdot 1{,}11 + 2\,(1{,}11)^3}{4{,}58 \cdot 2{,}14} =$$

$$= \frac{32{,}1 - 19{,}3 + 2{,}5}{9{,}8} \approx 1{,}56.$$

8. Вычислим коэффициент эксцесса по формуле (2.3.37):

$$\mathrm{Ex} = \frac{m_4'' - 4m_3''m_1'' + 6m_2''\,(m_1'')^2 - 3\,(m_1'')^4}{[m_2'' - (m_1'')^2]^2} - 3 =$$

$$= \frac{220{,}7 - 4 \cdot 32{,}1 \cdot 1{,}11 + 6 \cdot 5{,}81 \cdot (1{,}11)^2 - 3\,(1{,}11)^4}{(4{,}58)^2} - 3 =$$

$$= \frac{220{,}7 - 142{,}5 + 42{,}9 - 4{,}6}{21} - 3 \approx 2{,}5.$$

Заметим, что последовательная процедура способа произведений допускает использование уже полученных ранее промежуточных результатов для дальнейших вычислений. Так, в ча-

стности, определяя дисперсию и стандартное отклонение, мы вычислили промежуточные значения

$$[m_2'' - (m_1'')^2] = 4{,}58 \quad \text{и} \quad \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2} = 2{,}14,$$

которые использовали затем при расчете коэффициентов As и Ex.

Итак, искомые значения равны:

$$\text{M} \approx 0{,}11 \ \textit{сек}, \quad \sigma \approx 0{,}08 \ \textit{сек}, \quad \text{As} \approx 1{,}56, \quad \text{Ex} \approx 2{,}5.$$

Пример 2.3.7. Сопоставить оценки среднего арифметического значения и стандартного отклонения, вычисленные по распределениям, полученным в результате группировки по первому способу (табл. 2.3.8) и по второму способу (табл. 2.3.11).

Используя способ произведений, рассчитаем начальные моменты m_1'' и m_2'' по обоим распределениям (табл. 2.3.17). Тогда по формулам (2.3.28б и а) получаем:

$$\text{M}_1 = 62 + 4\,(-0{,}12) = 62 - 0{,}48 = 61{,}52 \ (\textit{мм}),$$

$$\text{M}_2 = 61{,}5 + 4 \cdot 0{,}01 = 61{,}5 + 0{,}04 = 61{,}54 \ (\textit{мм}),$$

где M_1 — среднее арифметическое при использовании первого способа группировки, и M_2 — среднее арифметическое при использовании второго способа группировки.

Вспомним, что среднее арифметическое значение, вычисленное по формуле среднего взвешенного:

$$\text{M} = 61{,}58 \ (\textit{мм}).$$

Можно видеть, что второй способ группировки дает значение арифметического среднего, более близкое к вычисленному по первичным данным, чем первый способ:

$$\text{M}_2 - \text{M} < \text{M}_1 - \text{M}.$$

Но все эти различия, в сущности, не важны, так как измерения (см. пример 2.3.2) амплитуды выполнялись с абсолютной ошибкой 0,5 *мм* и среднее арифметическое значение с учетом точности измерений должно быть округлено по крайней мере до $\text{M} = 61{,}5$ *мм*.

Вычислим далее по формуле (2.3.35) стандартные отклонения:

$$\sigma_1 = 4\sqrt{3{,}05 - 0{,}12^2} \approx 4 \cdot 1{,}74 = 6{,}96 \ (\textit{мм}),$$

$$\sigma_2 = 4 \cdot \sqrt{3{,}00 - 0{,}01^2} \approx 4 \cdot 1{,}73 = 6{,}92 \ (\textit{мм}),$$

где σ_1 и σ_2 относятся к распределениям, полученным по первому и второму способам группировки, соответственно. Различие между

Таблица 2.3.17

Промежуточные результаты вычисления М и σ к примеру 2.3.7

Первый способ группировки				
w_i, *мм*	$p_i\ (x_i \leq X \leq x_{i+1})$	w_i''	$w_i''p_i$	$(w_i'')^2 p_i$
42	0,0125	—5	—0,0625	0,3125
46	0,0150	—4	—0,0600	0,2400
50	0,0575	—3	—0,1725	0,5175
54	0,1250	—2	—0,2500	0,5000
58	0,1700	—1	—0,1700	0,1700
62	0,2750	—	—	—
66	0,1775	1	0,1775	0,1775
70	0,1025	2	0,2050	0,4100
74	0,0550	3	0,1650	0,4950
78	0,0025	4	0,0100	0,0400
82	0,0075	5	0,0375	0,1875
Суммы	1,0000	—	—0,1200	3,0500
Моменты	m_0	—	m_1''	m_2''

Продолжение табл. 2.3.17

Второй способ группировки				
w_i, *мм*	p_i	w_i''	$w_i''p_i$	$(w_i'')^2 p_i$
41,5	0,010	—5	—0,050	0,250
45,5	0,015	—4	—0,060	0,240
49,5	0,045	—3	—0,135	0,405
53,5	0,125	—2	—0,250	0,500
57,5	0,145	—1	—0,145	0,145
61,5	0,290	—	—	—
65,5	0,185	1	0,185	0,185
69,5	0,110	2	0,220	0,440
73,5	0,065	3	0,195	0,585
77,5	0,000	4	0,000	0,000
81,5	0,010	5	0,050	0,250
Суммы	1,000	—	0,010	3,000
Моменты	m_0	—	m_1''	m_2''

Примечание. $\lambda = 4$ *мм*; $A_1 = 62$ *мм*; $A_2 = 61{,}5$ *мм*.

результатами, очевидно, несущественно, так как они могут быть округлены до целых: $\sigma = 7$ (*мм*).

Итак, несмотря на более точные результаты, которые обеспечивает второй способ группировки, при измерениях с невысокой степенью точности проще применять первый способ.

§ 2.4. ВИДЫ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В природе существует большое разнообразие законов распределения, объясняемое свойствами самих случайных величин и условиями, в которых они подлежат изучению.

Основные свойства — положение на числовой оси, рассеивание, скошенность и выпуклость, рассмотренные выше, — в общем случае не определяют полностью аналитическое выражение для закона распределения некоторой случайной величины. Наоборот, аналитическое выражение, сообразующееся как с теоретическими знаниями о специфике случайной величины, так и с экспериментальными данными о ней, несет всю необходимую информацию о случайной величине, в том числе и об основных ее свойствах.

Говоря о виде закона распределения случайной величины X, будем иметь в виду, во-первых, свойства самой величины X как переменной (дискретность или непрерывность и возможные пределы области ее существования), во-вторых, свойства реальных условий, влияющих так или иначе на случайную величину X, и, в-третьих, определенное аналитическое (геометрическое и табличное) представление функций, связывающих значения x_i случайной величины X с соответствующими вероятностями P_i.

Из большого количества видов известных законов распределения мы рассмотрим лишь те, которые в настоящее время могут использоваться в психологических дисциплинах для описания случайных переменных. Кроме того, в главе 5 будут рассмотрены некоторые из специальных распределений, используемых при статистической проверке гипотез.

2.4.1. Нормальный закон

Нормальный закон * распределения во всех естественных науках имеет фундаментальное значение. И в психологических дисциплинах его значение трудно переоценить. Достаточно сказать, что все психологические шкалы основываются на этом законе, поскольку ему следуют распределения большинства человеческих способностей и свойств.

Самой общей характеристикой нормального распределения является простое наблюдение того закономерного факта, что очень большие центральные отклонения (x_i — M) встречаются крайне редко, а маленькие — часто, при этом одинаковые по модулю отклонения одинаково вероятны. Такая закономерность может иметь место в условиях, когда на случайную величину X действует большое число разнообразных факторов и доля воздействия каждого из них одинаково мала по сравнению с их числом.

---

* Закон Лапласа-Гаусса (по имени ученых, независимо открывших и исследовавших его) из-за широкого распространения в природе первоначально принимался за норму распределения любой случайной величины. Этим и обусловлено название «нормальный» закон.

Вероятность нормально распределенной величине X принять значение x_i на некотором интервале λ определяется уравнением *

$$P(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1}) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mathrm{M})^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (2.4.1)$$

где M — среднее арифметическое значение; σ — стандартное отклонение; $\pi - 3{,}14\ \ldots$; $\lambda = x_{i+1} - x_i$; $(-\infty < X < \infty)$. Можно видеть, что, согласно (2.4.1), значения вероятности определяются не только значениями аргумента x_i, но и значениями M, σ и λ, которые, естественно, различны у конкретных случайных величин. В этой связи целесообразно использовать вместо функции (2.4.1) функцию плотности вероятности, центрированную и нормированную стандартным отклонением:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0{,}5x^2), \qquad (2.4.2)$$

где $x = \frac{x_i - \mathrm{M}}{\sigma}$ — основные отклонения; $f(x) = \frac{1}{\lambda} P(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1})$ — плотность вероятности, как она была определена выше (стр. 87).

Плотность, определяемая уравнением (2.4.2), называется *стандартной* плотностью нормального закона. Ее значения приведены в табл. I Приложения 2.

Отметим некоторые свойства нормального распределения на примере его стандартной плотности (рис. 2.4.1, *а*).

1. При всех значениях x_i переменной X плотность $f(x)$ положительна.

2. Плотность $f(x)$ симметрична относительно математического ожидания, которое в этой связи нередко называют центром рассеивания (для симметричных распределений). Коэффициент асимметрии равен нулю.

3. При увеличении модуля аргумента $(|x_i| \to \infty)$ функция $f(x)$ сколь угодно близко (асимптотически) приближается к оси абсцисс, не достигая ее.

4. Максимальную плотность нормальное распределение имеет при $x_i = \mathrm{M}$:

$$f(x_i = \mathrm{M}) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

— для конкретной случайной величины и

$$f(x_i = \mathrm{M}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}39894$$

— для стандартного выражения плотности (табл. I Приложения 2). Таким образом, в случае нормального распределения численные

* Запись exp (z) читается «экспонента от z» и обозначает известную экспоненциальную функцию e^z, где e — основание натуральных логарифмов.

значения среднего арифметического, моды и медианы (свойство 2) совпадают.

5. Из рис. 2.4.1, *а* можно видеть, что плотность нормального распределения быстро убывает по мере увеличения значений

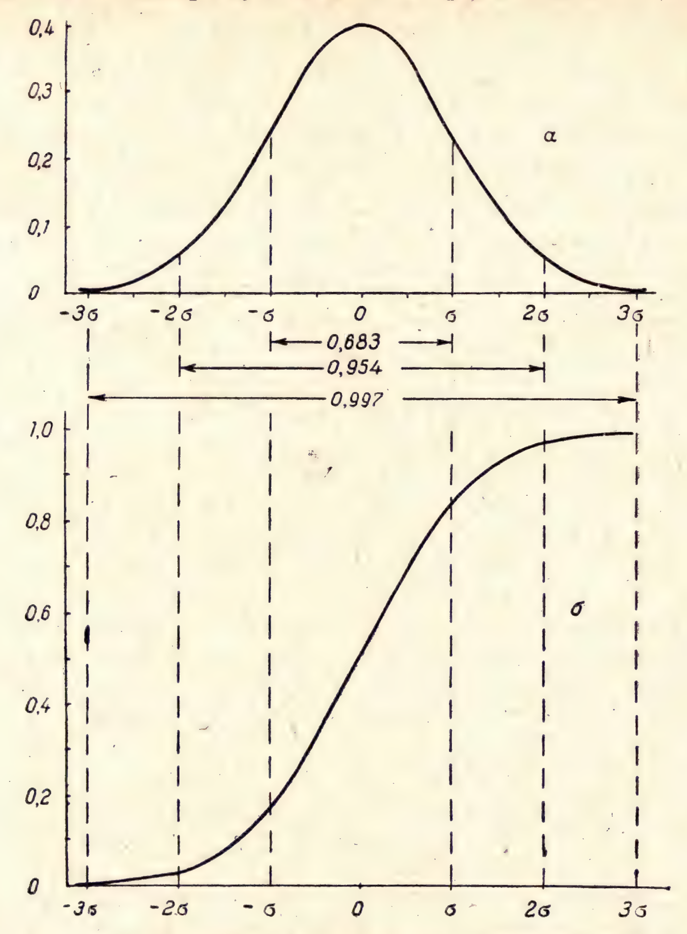


Рис. 2.4.1. Плотность (*а*) и функция распределения (*б*) нормального закона в стандартном масштабе.

По осям абсцисс — значения случайной величины в единицах стандартного отклонения (σ), по осям ординат — плотности и вероятности соответственно.

центрированной случайной величины, выраженных в единицах стандартного отклонения, в частности, следует запомнить, что

$$\left.\begin{aligned} P(-\sigma \leqslant X \leqslant \sigma) &\approx 0{,}683, \\ P(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) &\approx 0{,}954, \\ P(-3\sigma \leqslant X \leqslant 3\sigma) &\approx 0{,}997. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.3)$$

В этой связи и стандартное (среднее квадратическое) отклонение определяют по аналогии с полуинтерквартильным отклонением как половину величины интервала, симметричного относительно центра рассеивания, для которого вероятность появления на нем значений случайной величины X равна 0,683.

6. Заметим (рис. 2.4.1, *а*), что при значениях $-\sigma$ и σ на кривой стандартной плотности имеются точки смены кривизны (перегиба): на участке ($-\sigma \leqslant X \leqslant \sigma$) функция плотности вогнута вниз, а за его пределами, наоборот, вогнута вверх.

7. Четвертый основной момент: $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$; поэтому в уравнение для коэффициента эксцесса и введено слагаемое (—3), чтобы эксцесс нормального распределения численно равнялся нулю и служил «началом» отсчета для измерения степени крутости любых функций распределения.

Вероятность случайной величине X принять значение не больше заданного x определяется функцией распределения:

$$P(X \leqslant x) = F(x),$$

где в стандартном масштабе $\left(x = \frac{x_i - M}{\sigma}\right)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-0{,}5x^2)\,dx. \qquad (2.4.3)$$

Эта функция изображена на рис. 2.4.1, *б*. Так как $F(x)$ симметрична относительно центра рассеивания, то при вычислениях используют разные другие формулы*. В частности, в табл. I Приложения 2 значения $F(x)$ приведены только для положительных значений аргумента

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \exp(-0{,}5x^2)\,dx, \qquad (2.4.3а)$$

поэтому значения $F(x)$ при отрицательных значениях аргумента ($-\infty < X \leqslant 0$) следует определять по формуле

$$F(-x) = 1 - F(x), \qquad (2.4.3б)$$

где $F(x)$ берется по табл. I Приложения 2 для модуля аргумента.

Несмотря на то, что теоретически нормальный закон распределения предполагает существование бесконечно малых и бесконечно больших значений любой, следующей ему случайной величины, на практике, тем более в психологии, случайные переменные

---

* См. Г. Г. Абергауз, А. П. Тронь, Ю. Н. Копенкин, И. А. Коровина. Справочник по вероятностным расчетам. Воениздат, М., 1966.

имеют конечные области существования. В этой связи на практике используются функции нормального распределения, ограниченные слева и справа основными отклонениями: $-4 < x < 4$, как в табл. I Приложения 2.

Чтобы установить, является ли эмпирическое распределение изучаемой случайной величины нормальным, необходимо сопоставить сведения о свойствах этой величины и условиях ее изучения, известные исследователю, со свойствами функций нормального распределения, рассмотренными выше. Это сопоставление в начале является качественным, а затем осуществляется специальными количественными методами. Основой качественного сопоставления служит основное «физическое» условие появления нормального распределения, а именно действие на изучаемую случайную величину большого числа факторов, тоже случайных, воздействия которых преимущественно независимы и примерно одинаковы. Если такое условие, по мнению исследователя, имеет место, то можно ожидать, что изучаемая случайная величина распределена нормально. Так, на формирование способностей человека действует множество различных случайных факторов (биологических, физиологических, психических и социальных). В этой связи можно ожидать, что в массе людей степень выраженности той или иной способности распределена нормально. И это во многом подтверждается практикой тестирования способностей.*

Количественное сопоставление включает два последовательных этапа. Первый — сравнение отдельных свойств эмпирического распределения со свойствами нормального закона. Это касается прежде всего симметричности (мода, медиана и среднее арифметическое примерно или точно одинаковы) и эксцесса (коэффициент эксцесса близок нулю). Весьма информативным является факт наличия точек смены кривизны на сглаженном от руки полигоне распределения при значениях случайной величины $x_i = -\sigma$ и $x_i = \sigma$, а также факт приближенного выполнения равенств (2.4.3). Если имеется соответствие между некоторыми из перечисленных свойств эмпирического и нормального распределения, то можно перейти к следующему этапу.

Второй этап состоит в вычислении теоретической функции распределения по эмпирическому ряду в предположении, что он подчиняется нормальному закону. Именно это предположение и обосновывается при качественном и количественном (на первом этапе) сопоставлении свойств.

Вычисление теоретических значений вероятностей, соответствующих эмпирическим частостям, в общем случае осуществляется либо по таблицам функций распределения, либо через логарифмы, либо — с использованием таблиц специальных функций. Нередки комбинации двух последних способов.

---

* См., например, Математические методы в современной буржуазной социологии. «Прогресс». М., 1966.

В предположении нормального закона обычно пользуются таблицами функций $f(x)$ или $F(x)$. Суть вычисления вероятностей здесь такова. Осуществляют преобразование значений x_i случайной величины X в основные отклонения

$$x = \frac{x_i - \text{M}}{\sigma},$$

для чего, разумеется, предварительно следует по эмпирическому ряду вычислить оценки М и σ. Далее по табл. I Приложения 2 для всех x эмпирического ряда определяют значения стандартной плотности $f(x)$, которые затем умножают на отношение $\frac{\lambda}{\sigma}$, чтобы от стандартного перейти к истинному (опытному) масштабу функций распределения, или значению функции распределения $F(x)$:

$$P_i^*(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1}) = \frac{\lambda}{\sigma} f_i(x) \qquad (2.4.4а)$$

и

$$P_i^*(X \leqslant x_i) = F_i(x). \qquad (2.4.4б)$$

Сопоставление заканчивается сравнением фактических (полученных в опыте) частостей и теоретических (вычисленных) вероятностей. Если различия малы или отсутствуют, то можно считать, что изучаемая случайная величина распределена нормально. Лишенная субъективных предпочтений оценка того, «малы» или «велики» получившиеся различия, осуществляется с помощью специальных критериев согласия, которые будут рассмотрены в главе 5.

Если согласие теоретического распределения с эмпирическим рядом приемлемое, то посредством теоретических функций распределения можно решать важные для практических приложений задачи:

— определять вероятности $P(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda)$ при любом по величине λ;

— определять вероятности

$$P(X \leqslant x_i) \text{ и } (P(X \geqslant x_i), \qquad (2.4.4в)$$

где

$$P(X \leqslant x_i) + P(X \geqslant x_i) = 1; \qquad (2.4.4г)$$

— определять квантили (обратная предыдущей задача): по заданной вероятности (2.4.4в) определить значение x_i случайной переменной X;

— определять среднее арифметическое значение части распределения, отсекаемой ординатой $f(x)$.

Пример 2.4.1. В табл. 2.3.11 приведен эмпирический ряд распределения значений амплитуды установившихся колебаний руки человека, для которого в примере 2.3.7 вычислены значения среднего арифметического и стандартного отклонения. Проверим, не является ли распределение амплитуд нормальным, и если является, то определим:

1) 2,5%-ные квантили; 75%-ный квантиль;

2) вероятность того, что амплитуда будет больше 75 *мм*;

3) вероятность того, что амплитуда колебаний руки будет находиться в пределах 50—70 *мм*;

4) среднее арифметическое значение амплитуды при условии, что амплитуда будет не больше 66 *мм*.

Эмпирическому ряду распределения амплитуд (см. табл. 2.3.11 и 2.4.1) соответствует полигон распределения на рис. 2.4.2. Рассматривая ряд распределения и его полигон, можно видеть, что ряд близок симметричному. Суммарная частость значений на интервале (53,5—69,5) несколько большем, чем интервал в два стандартных отклонения $2\sigma = 2\cdot 6{,}92$ *мм*, составляет 0,737, т. е. первое равенство (2.4.3) приближенно выполняется. Среднее арифметическое значение находится в том же интервале группировки, что и мода, и (из-за симметричности) медиана.

Конечно, амплитуда движений руки не может быть бесконечно малой и бесконечно большой, поэтому область существования

Таблица 2.4.1

Расчет теоретических вероятностей к примеру 2.4.1 в предположении нормального закона

Среднее значение интервала w_i	Частости p_i	Основные отклонения x	Стандартная плотность $f(x)$	Вероятность p_i^*
41,5	0,010	—2,9	0,00595	0,003
45,5	0,015	—2,3	0,02833	0,016
49,5	0,045	—1,7	0,09405	0,054
53,5	0,125	—1,15**	0,20560	0,119
57,5	0,145	—0,6	0,33322	0,193
61,5	0,290	0,0	0,39894	0,231
65,5	0,185	0,6	0,33322	0,193
69,5	0,110	1,15**	0,20560	0,119
73,5	0,065	1,7	0,09405	0,054
77,5	0,000	2,3	0,02833	0,016
81,5	0,010	2,9	0,00595	0,003
$\sum_{i=1}^{11}$	1,000	0,0	1,73324	1,001

Примечание. 1. Проверка вычислений x и $f(x)$ осуществляется выполнением равенства $\frac{\lambda}{\sigma}\sum_i f(x)\approx 1$. В нашем случае $\lambda = 4$ и $\sigma = 6{,}92$; $\frac{4}{6{,}92}\cdot 1{,}73324 = \frac{6{,}93296}{6{,}92}\approx 1{,}002$; $p_i^* = \frac{\lambda}{\sigma} f(x) = 0{,}58\ f(x)$ соответственно формуле (2.4.4а). Разумеется, требуется, чтобы $\sum_i p_i^* \approx 1$.

Значения, отмеченные двумя звездочками, получены по табл. I Приложения 2 путем линейной интерполяции: $f(x + 0{,}05) = 0{,}5\,[f(x + 0{,}1) - f(x)]$.

рассматриваемой случайной величины ограничена.* Тем не менее, уже приведенные черты сходства позволяют предполагать возможным нормальное распределение и перейти к вычислениям (второй этап сопоставления).

Последовательность вычислений демонстрирует табл. 2.4.1. Сравнивая пока визуально частости p_i из второго столбца табл. 2.4.1 и вероятности p_i^* из последнего столбца, можно видеть,

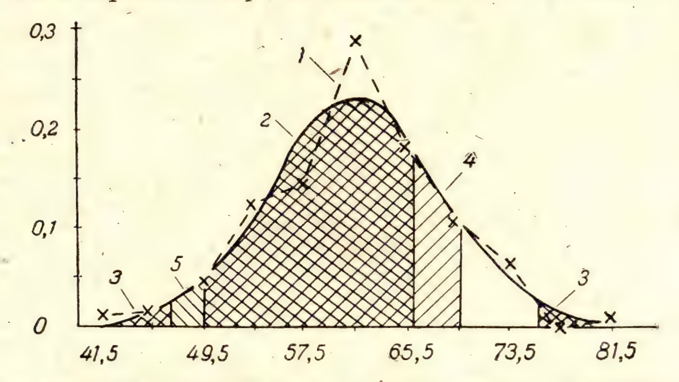


Рис. 2.4.2. Полигон эмпирического ряда распределения и соответствующая ему дифференциальная функция нормального распределения.

1 — полигон; *2* — дифференциальная функция; *3* — доли распределения вероятностей, соответствующие 2,5%-ным квантилям; *4* — доля, соответствующая вероятности P (50 *мм* $\leqslant X \leqslant$ 70 *мм*); *5* — доля, покрывающая часть распределения, соответствующую ограниченному x_i = 66 *мм* (усеченному) распределению.

что различия невелики. Следовательно, можно предполагать с определенными основаниями, что амплитуда колебаний руки распределена нормально. В частности, можно записать функцию, связывающую в нашем примере вероятности амплитуде принять значения на интервале $\lambda = 4$ со значениями амплитуды:

$$p_i^* (x_i \leqslant X \leqslant x_i + 4) = 0{,}58 \cdot f(x),$$

где $f(x)$ — стандартная нормальная плотность с параметрами $\mathrm{M} = 61{,}5$ и $\sigma = 6{,}92$ (см. рис. 2.4.2).

Определим теперь интегральную функцию. Самый простой способ — использование табл. I Приложения 2, непосредственно дающей теоретические значения вероятностей

$$P (X \leqslant x_i) = F\left(x = \frac{x_i - \mathrm{M}}{\sigma}\right).$$

Эти вероятности приведены во втором столбце табл. 2.4.2, а связывающая их функция — на рис. 2.4.3.

Если под рукой нет таблицы значений $F(x)$, то значения этой функции приближенно определяются суммированием вероятно-

---

* Минимальная амплитуда тождественно равна нулю, а максимальная была ограничена в опытах до 400 *мм*.

Таблица 2.4.2

Вероятности значений амплитуды, не больше заданной

w_i	x	$F(x)$	$F^*(x_k)$
41,5	—2,9	0,002	0,002
45,5	—2,3	0,011	0,011
49,5	—1,7	0,045	0,046
53,5	—1,15	0,125	0,133
57,5	—0,6	0,274	0,288
61,5	0,0	0,500	0,500
65,5	0,6	0,726	0,712
69 5	1,15	0,875	0,869
73,5	1,7	0,955	0,955
77,5	2,3	0,989	0,990
81,5	2,9	0,998	1,000

Примечание. Табличные значения $F(x)$ округлены. Значения $F^*(x_k)$ получены в соответствии с формулой (2.4.5).

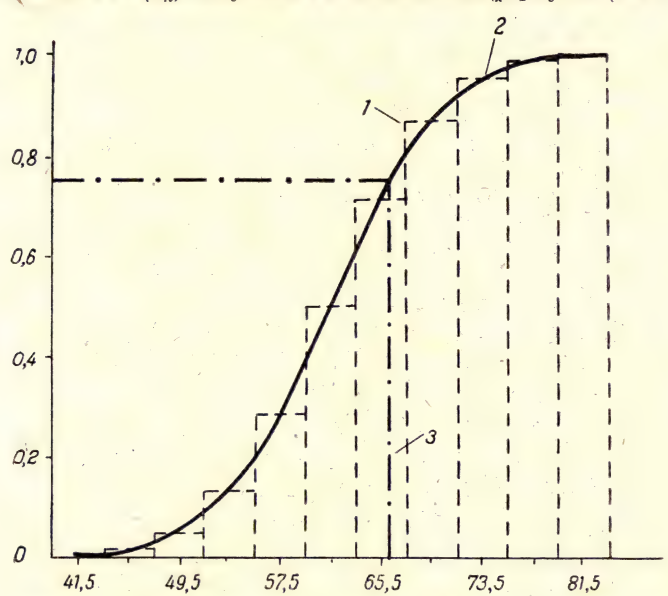


Рис. 2.4.3. Кумулятивная гистограмма $F^*(x_i)$ и соответствующая ей функция нормального распределения $F(x)$.
1 — гистограмма; *2* — функция; *3* — 75%-ный квантиль.

стей $P_i^* = P(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda)$. Но при этом следует учитывать, что для любого интервала λ_k, среднему значению $w_k = x_k$ которого сопоставляется вероятность $P(X \leqslant x_k)$, искомое значение этой вероятности:

$$F^*(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^* + 0{,}5 p_k^* \qquad (2.4.5)$$

включает только половину элемента вероятности P_k^*, приходящейся на интервал λ_k (рис. 2.4.3).

Займемся теперь определением 2,5%-ных и 75%-ного квантилей распределения амплитуд. Как указывалось выше (§ 1.4), квантилем называется значение x_α случайной величины X, для которого вероятность

$$P(X \leqslant x_\alpha) = \alpha. \tag{2.4.6}$$

Часто вместо вероятности α используют процент, тогда и говорят о α-процентном квантиле.

Квантили непосредственно определяют по таблице значений $F(x)$, отыскивая вероятность:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = F(x_k) \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant 0{,}5,\\ &\qquad\qquad\qquad\quad x_k > 0\\ &\text{или}\\ &\alpha = 1 - F(x_k) \ \text{при} \ \alpha < 0{,}5,\\ &\qquad\qquad\qquad\quad x_k < 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.6а}$$

после чего, осуществляя обратное преобразование аргумента из стандартного в естественный масштаб, определяют

$$x_\alpha = \sigma \cdot x_k + \text{M}. \tag{2.4.6б}$$

1. Итак, 2,5%-ных квантилей два — это $x_{0,025}$ и $x_{0,975}$. Определим сначала второй. По табл. I Приложения 2 находим

$$F(2{,}0) = 0{,}977 \approx 0{,}975.$$

Основное отклонение $x_k = \pm 2{,}0$ и может служить для приближенной оценки искомых квантилей (см. рис. 2.4.2):

$$x_{0,025} \approx 6{,}92 \cdot (-2) + 61{,}5 \approx 47{,}7 \ (\textit{мм}),$$
$$x_{0,975} \approx 6{,}92 \cdot 2 + 61{,}5 \approx 75{,}3 \ (\textit{мм}).$$

Аналогично вычислим 75%-ный квантиль. Из табл. I Приложения 2 находим $F(0{,}7) \approx 0{,}75$, следовательно, как показано на рис. 2.4.3:

$$x_{0,75} \approx 6{,}92 \cdot 0{,}7 + 61{,}5 \approx 66{,}3 \ (\textit{мм}).$$

Заметим теперь, что 75%-ный квантиль — это третий квартиль (Q_3), который мы можем вычислить по формулам (1.4.15) и (1.4.16), используя вероятности p_i^* из табл. 2.4.1. В частности, по формуле (1.4.15) получим

$$X_{0,75} = 63{,}5 + 4\,(0{,}750 - 0{,}616) \cdot \frac{1}{0{,}193} \approx 66{,}3 \ (\textit{мм}).$$

Таким образом, пользуясь этими формулами, мы можем определять по значениям гистограммы (полигона) любые квантили.

2. Если нахождение квантиля — это задача нахождения аргумента по заданному значению функции, то определение искомой вероятности — прямая задача, которая решается по той же таблице значений $F(x)$, где $x = \frac{x_i - \mathrm{M}}{\sigma}$ и x_i — задан. Так, искомая вероятность

$$p[X > 75 \text{ мм}] = 1 - p[X \leqslant 75 \text{ мм}] = 1 - F\left(\frac{75 - 61{,}5}{6{,}92}\right) =$$
$$= 1 - F(1{,}95).$$

По табл. I Приложения 2, интерполируя, находим

$$F(1{,}95) \approx F(1{,}9) + 0{,}5\,[F(2{,}0) - F(1{,}9)] \approx 0{,}974.$$

Следовательно,

$$p[X > 75 \text{ мм}] \approx 1 - 0{,}974 = 0{,}026.$$

3. Вероятность того, что случайная величина X, имеющая плотность $f(x)$, примет значение на конечном замкнутом интервале $(a - b)$ — это определенный интеграл:

$$p(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

который для нормального закона часто называют функцией Лапласа, а в общем случае — *интегралом вероятности*.* Мы будем определять такие вероятности, пользуясь таблицей значений $F(x)$:

при
$$\left. \begin{array}{l} p(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) \\ b > a > \mathrm{M} \text{ и } a < b < \mathrm{M}, \end{array} \right\} \qquad (2.4.7\text{а})$$

при
$$\left. \begin{array}{l} p(a \leqslant X \leqslant b) = [F(b) + F(|a|)] - 1 \\ b > \mathrm{M} \text{ и } a < \mathrm{M}, \end{array} \right\} \qquad (2.4.7\text{б})$$

где М — среднее арифметическое значение.

Искомая вероятность $P(50 \text{ мм} \leqslant X \leqslant 70 \text{ мм})$ должна быть вычислена по формуле (2.4.7б), так как $a < \mathrm{M}$:

$$p(50 \text{ мм} \leqslant X \leqslant 70 \text{ мм}) = \left[F\left(\left|\frac{50 - 61{,}5}{6{,}92}\right|\right) + F\left(\frac{70 - 61{,}5}{6{,}92}\right)\right] -$$
$$- 1 \approx [F(1{,}65) + F(1{,}2)] - 1 \approx 0{,}950 + 0{,}885 - 1 = 0{,}835;$$

эта вероятность показана на рис. 2.4.2.

4. Задача определения среднего арифметического значения усеченного распределения может получить большое распространение

---

* В упомянутом на стр. 136 «Справочнике по вероятностным расчетам» дана сводка формул, по-разному выражающих интеграл вероятности.

в психологической практике, в частности, при оценке средней успешности выполнения экспериментальных заданий в подгруппах хорошо (плохо) успевающих испытуемых.*

Обозначая среднее арифметическое значение усеченного в «точке» x_k распределения случайной величины X как $\text{M}\,[X \leqslant x_k]$, будем использовать для расчетов формулу

$$\text{M}\,[X \leqslant x_k] = \text{M} \pm \sigma \cdot \frac{f\,(x)}{F\,(x)}, \qquad (2.4.8)$$

где $f\,(x)$ и $F\,(x)$ — соответственно плотность и функция распределения нормального закона в стандартном масштабе: $x = \frac{x_k - \text{M}}{\sigma}$, а знак определяется тем, с какой стороны «усекается» распределение («плюс», если слева, и «минус», если справа). Так, для $x_k = 66$ получаем $x \approx 0{,}65$. По табл. I Приложения 2 находим, интерполируя:

$$f\,(0{,}65) \approx 0{,}32273 \text{ и } F\,(0{,}65) \approx 0{,}74189.$$

Далее по формуле (2.4.8) со знаком «минус», так как отсекаются большие значения амплитуды, вычисляем:

$$\text{M}\,[X \leqslant 66 \text{ мм}] \approx 61{,}5 - 6{,}92 \cdot \frac{0{,}32273}{0{,}74189} \approx 58{,}5 \text{ (мм)}.$$

2.4.2. **Нормализация по составу**

При измерении психических явлений одной из важнейших становится задача *уравнивания* интервалов между значениями x_i случайной психической переменной X, отображенными в баллах y_i ранжированной величины Y (см. рис. 1.4.2).

Как указывалось (§ 1.4), баллы y_i, линеаризуя интервалы λ_X в λ_Y, маскируют возможное неравенство интервалов λ_X между значениями x_i. Уравнять λ_X, не прибегая к посредничеству баллов, можно специальными экспериментальными методами.** Во многих случаях, однако, задача уравнивания проще может быть решена статистически. Одним из наиболее распространенных методов статистического уравнивания является статистическая нормализация.

Суть статистической нормализации сводится к тому, чтобы отобразить значения y_i случайной переменной Y с плотностями вероятности $f\,(y)$ в значениях x_i нормально распределенной величины X с плотностями вероятности $f\,(x)$, приравнивая плотности:

$$f\,(x) = f\,(y). \qquad (2.4.9)$$

---

* Так, средний $IQ = 115$ для студентов факультета психологии ЛГУ (по Векслеру) — это среднее арифметическое усеченного распределения, так как среднее арифметическое векслеровской шкалы равно 100.

** См. М. Р ё ш л е н. Измерение в психологии. В сб. Экспериментальная психология. Под ред. П. Фресса и Ж. Пиаже. «Прогресс», М., 1966.

Так как у нормально распределенной случайной величины X все интервалы между основными отклонениями $x = \frac{x_i - M_X}{\sigma}$, выраженными в единицах стандартного отклонения, равны между собой, то осуществляя приравнивание плотностей (2.4.9), мы фактически выражаем любые (в том числе и неравные) интервалы λ_Y в равных интервалах λ_X. Таким образом, задача статистической нормализации переменной X состоит в том, чтобы найти для нее нормальные плотности вероятности $f(x)$ *. Это можно осуществить в эксперименте, преобразуя переменную Y в X, и плотности $f(y)$ в $f(x)$.

Нормализация в эксперименте состоит в том, что меняя состав тестовых задач (вопросов, стимулов и т. д.), подбирают такие, набор которых приводит к нормальному распределению вероятностей результатов (затрат времени, баллов, производительности и т. д.). Это трудный путь. Обычно его не проходят до конца, ограничиваясь получением распределения, близкого к симметричному, которое дальше нормализуют по составу.

Функционально преобразуя изучаемую переменную Y в нормально распределенную переменную X, подбирают вид функции $X = \varphi(Y)$, такой, чтобы в результате как-то не по Гауссу распределенная величина Y привела бы к нормально распределенному X. Наиболее распространенный случай — так называемое *логарифмически нормальное* распределение, имеющее плотность

$$f(u) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } y_i \leqslant 0 \\ \frac{1}{2{,}303\, \sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-0{,}5u^2\right] \quad \text{при } y_i > 0 \end{array} \right\}, \qquad (2.4.10)$$

где

$$u = \frac{x_i - M_X}{\sigma_X} \text{ и } x_i = \lg y_i.$$

Здесь функция φ, преобразующая y_i в x_i есть десятичный логарифм. **

Функциональное преобразование не всегда возможно, в частности, необходимо, чтобы преобразуемая переменная Y была уже распределена логарифмически нормально, а это встречается редко.

Наиболее простым и требующим только приблизительно симметричного исходного распределения Y является путь нормализации по составу; его и рассмотрим подробнее.

---

* Вероятности $P(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_X)$ в социальной психологии часто называют *маргиналами*. И задача статистической нормализации формулируется как нахождение нормальных маргиналов. См. например, сб. Математические методы в современной буржуазной социологии. «Прогресс», М., 1966.

** Подробнее об этом см. Справочник по вероятностным расчетам. Воениздат, М., 1966.

Нормализация по составу заключается в том, чтобы, пользуясь уравнением (2.1.7), изменять величину каждого интервала λ_Y переменной Y так, чтобы его плотность стала нормальной. Процедура нормализации по составу сводится к следующему.

1. Выбирают «удобное» среднее арифметическое М $[X]$, такое, чтобы значения $x_i = \sigma[X] \cdot x + M[X]$, в свою очередь, были «удобными» числами, например, натуральными с $[x_i]_{\min} = 0$ и $\sigma[X]$ — тоже натуральным числом. Обычно требуется, чтобы $\sigma[X] \geqslant \sigma[Y]$, где $\sigma[Y]$ — предварительно экспериментально оценивается.

2. По выбранным М $[X]$, $\sigma[X]$ и $[x_i]_{\min}$ строят шкалу значений x_i переменной X, все интервалы которой одинаково равны единице:

$$x_{i+1} - x_i = \lambda_X = 1.$$

3. Для переменной X по ее значениям x_i определяют нормальную плотность:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma[X]} f(x), \qquad (2.4.11)$$

где $f(x)$ — берется по табл. I Приложения 2;

$$x = \frac{x_i - M[X]}{\sigma[X]}.$$

4. Для нормализуемой переменной Y вычисляют плотности вероятности (или частоты, частости), после чего значения Y_i отстоят друг от друга тоже на равные интервалы $\lambda_y = 1$.

5. Функцию плотности $f(y_i)$ центрируют в рабочей таблице относительно М $[X]$, иначе говоря интервал λ_Y, содержащий оценку среднего арифметического (или моды и медианы), ставят в соответствие интервалу λ_X, среднее значение которого $w_X \equiv M[X]$ нормализующей переменной X.

6. Далее в любом порядке совместно рассматривают пары плотностей $f(y_i)$ и $f(x_i)$. Если нормализуемая плотность в a раз больше нормальной плотностности $f(x_i)$, то осуществляют преобразование

$$f(x_i) = \frac{1}{a} f(y_i) \text{ и } \lambda_X = a \cdot \lambda_Y, \qquad (2.4.12а)$$

т. е. плотность $f(y_i)$ уменьшают в a раз, и соответственно, чтобы вероятность не изменилась, в a раз увеличивают интервал λ_Y (см. рис. 2.4.4, *а* и *в*).

Если, наоборот, нормализуемая плотность $f(y_i)$ в a раз меньше нормальной плотности $f(x)$, то ее увеличивают и соответствующий интервал λ_Y уменьшают (см. рис. 2.4.4, *а* и *б*):

$$f(x_i) = af(y_i) \text{ и } \lambda_X = \frac{\lambda_Y}{a}. \qquad (2.4.12б)$$

Так как обычно значения x_i и y_i — это натуральные числа (y_i — обычно баллы или суммы баллов), то нормирующий пара-

метр a — число целое, и преобразование интервалов λ_Y в λ_X сводится к сдваиванию (страиванию и т. д.) λ_Y, либо к их делению на два, три и т. д.

Пример 2.4.2. Для одного из субтестов шкалы Векслера (отечественный вариант) получено распределение предварительных оценок (баллов) Y, представленное в табл. 2.4.3. Как известно, шкала Векслера нормализована в целом и по субтестам. Поэтому необходимо нормализовать и распределение предварительных

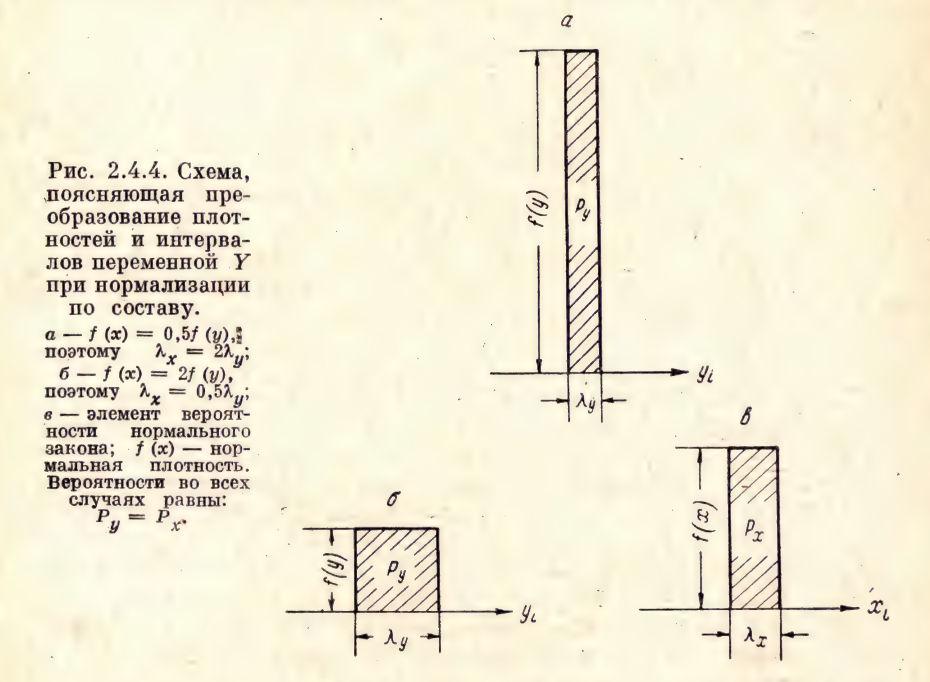


Рис. 2.4.4. Схема, поясняющая преобразование плотностей и интервалов переменной Y при нормализации по составу.
$а$ — $f(x) = 0,5f(y)$, поэтому $\lambda_x = 2\lambda_y$; $б$ — $f(x) = 2f(y)$, поэтому $\lambda_x = 0,5\lambda_y$; $в$ — элемент вероятности нормального закона; $f(x)$ — нормальная плотность. Вероятности во всех случаях равны: $P_y = P_x$.

оценок. Конечно, это следует делать на репрезентативной совокупности испытуемых. Однако принципиальное знакомство с нормализацией по составу можно осуществить и на распределении Y из табл. 2.4.3.

1. В качестве среднего арифметического нормально распределенной переменной X выберем $M[X] = 10$, а в качестве стандартного отклонения — $\sigma[X] = 3$. Именно эти значения характеризуют пересчетную шкалу Векслера. Минимальное значение x_i пусть будет $[x_i]_{\min} = 1$.

2. Тогда *основание* нормализующей переменной X определяется ее значениями $x_i = 1, 2, 3, \ldots, 19$, как показано в табл. 2.4.4, так как естественно ограничиться размахом нормального распределения в пределах $\pm 3\sigma[X]$, откуда

$$[x_i]_{\max} = [x_i]_{\min} + 6\sigma[X] = 19.$$

Таблица 2.4.3

Распределение предварительных оценок (баллов) к примеру 2.4.2

Баллы y_i	Частоты	Частости $f(y_i)$
16	1	0,01
15	4	0,04
14	3	0,03
13	7	0,07
12	20	0,20
11	30	0,30
10	13	0,13
9	14	0,14
8	7	0,07
7	1	0,01
$\sum_i$	100	1,00

Примечание. Так как все $\lambda_y = 1$, то плотности $f(y_i)$ тождественно равны частостям.

3. По табл. I Приложения 2, пользуясь уравнением (2.4.11), определим нормальные плотности $f(x_i)$, они приведены во втором столбце табл. 2.4.4. Так как распределение Y уже задано плотностями $f(y_i)$, то остается ее центрировать относительно М $[X]$.

4. Как следует из табл. 2.4.3, модальное и медиальное значения баллов — это $y_i = 11$. Поэтому примем $y_i = 11$ за центр рассеивания и сопоставим его М $[X] = 10$, поместив в строку $x_i = 10$ (табл. 2.4.4, третий столбец).

5. Рассматривая совместно пары плотностей $f(y_i)$ и $f(x_i)$, расположенные в одинаковых строках табл. 2.4.4, замечаем, что минимальные (для данной выборки) * значения плотностей

$$f(y_i = 16) \approx f(x_i = 17)$$

и

$$f(y_i = 7) \approx f(x_i = 3).$$

Следовательно, можно отождествить соответственно

$$(y_i = 16) \equiv (x_i = 17)$$

и

$$(y_i = 7) \equiv (x_i = 3),$$

и записать плотность $f(y_i = 16)$ и само значение $y_i = 16$ в строке, соответствующей $x_i = 17$, как показано в табл. 2.4.4.

* На большей, чем в 100 испытуемых, выборке, очевидно, можно было бы получить и более редкие баллы.

Таблица 2.4.4

Преобразование плотностей и интервалов, итог — шкала пересчета баллов Y в значении измеряемой величины X (к примеру 2.4.2)

Преобразование $f(y_i) \longrightarrow f(x_i)$ и $\lambda_Y \longrightarrow \lambda_X$						Шкала пересчета	
x_i	$f(x_i)$	y_i	$f(y_i)$	$f(y_i)\approx f(x_i)$	$y_i \equiv x_i$	X	Y
19	0,0015					19	
18	0,004					18	
17	0,009			0,010	16	17	16
16	0,018			0,040	15	16	15
15	0,034	16	0,010	0,030	14	15	14
14	0,057	15	0,040	0,070	13	14	13
13	0,081	14	0,030	0,100		13	–
12	0,107	13	0,070	0,100	12	12	12
11	0,127	12	0,200	0,100		11	–
10	0,133	11	0,300	0,100	11	10	11
9	0,127	10	0,130	0,100		9	–
8	0,107	9	0,140	0,130	10	8	10
7	0,081	8	0,070	0,070		7	9
6	0,057	7	0,010	0,070	9	6	–
5	0,034			0,035		5	8
4	0,018			0,035	8	4	–
3	0,009			0,010	7	3	7
2	0,004					2	
1	0,0015					1	

Рассмотрим далее пары $f(y_i = 15)$ и $f(x_i = 16)$, $f(y_i = 14)$ и $f(x_i = 15)$, $f(y_i = 13)$ и $f(x_i = 14)$. Можно видеть, что

$$f(y_i = 14) \approx f(x_i = 15)$$

и

$$f(y_i = 13) \approx f(x_i = 14),$$

хотя в последнем случае приближение хуже, чем в первом. Для пары $f(y_i = 15)$ и $f(x_i = 16)$ сходства нет вообще. Тем не менее, помня о том, что в совокупности результатов, полученных от 100 испытуемых, значения плотности могут случайным образом изменяться в широких пределах (см. стр. 307), можем поставить в соответствие:

$$(y_i = 15) \equiv (x_i = 16),$$

$$(y_i = 14) \equiv (x_i = 15),$$

$$(y_i = 13) \equiv (x_i = 14),$$

как это сделано в табл. 2.4.4.

Рассмотрим теперь тройку плотностей $f(y_i = 8)$ и $f(x_i = 4)$, $f(x_i = 5)$. Можно видеть, что

$$f(y_i = 8) \approx f(x_i = 4) + f(x_i = 5).$$

Это свидетельствует о том, что имеет место случай *а* (см. рис. 2.4.4). Нужно уменьшить вдвое плотность $f(y_i = 8)$:

$$0{,}5f(y_i = 8) \approx f(x_i = 4)$$

и

$$0{,}5f(y_i = 8) \approx f(x_i = 5),$$

а также увеличить, соответственно, вдвое интервал λ_Y, т. е. балл $y_i = 8$ должен соответствовать значениям $x_i = 4$ и $x_i = 5$ одновременно. Результаты преобразования $0{,}5f(y_i = 8) = 0{,}035$ и «удвоения» $y_i = 8$ показаны в табл. 2.4.4.

Аналогично обстоит дело и с тройкой плотностей $f(y_i = 9)$ и $f(x_i = 6)$, $f(x_i = 7)$:

$$f(y_i = 9) \approx f(x_i = 6) + f(x_i = 7),$$

поэтому

$$0{,}5f(y_i = 9) \approx f(x_i = 6)$$

и

$$0{,}5f(y_i = 9) \approx f(x_i = 7),$$

соответственно балл $y_i = 9$ одновременно сопоставляется значениям $x_i = 6$ и $x_i = 7$ (табл. 2.4.4). Такое же преобразование осуществляется для плотности $f(y_i = 12)$:

$$0{,}5f(y_i = 12) \approx f(x_i = 13)$$

и

$$0{,}5f(y_i = 12) \approx f(x_i = 12),$$

а балл $y_i = 12$ одновременно сопоставляется значениям $x_i = 13$ и $x_i = 12$.

Остается рассмотреть модальное значение $y_i = 11$ и $x_i = 9$, 10, 11. Можно видеть, что

$$f(y_i = 11) \approx f(x_i = 9) + f(x_i = 10) + f(x_i = 11),$$

хотя приближение имеет место «с точностью до порядка». Так как никакая другая комбинация не проходит, остается принять:

$$\frac{1}{3} f(y_i = 11) \approx f(x_i = 9),$$

$$\frac{1}{3} f(y_i = 11) \approx f(x_i = 10),$$

$$\frac{1}{3} f(y_i = 11) \approx f(x_i = 11).$$

Соответственно балл $y_i = 11$ одновременно сопоставляется всем трем значениям: $x_i = 9, 10, 11$, т. е. интервал λ_Y увеличивается втрое.

Последняя, еще не сопоставленная пара $f(y_i = 10)$ и $f(x_i = 8)$ приводится в соответствие единственным образом (табл. 2.4.4).

Преобразованная шкала значений $y_i = x_i$, однако, неудобна практически, так как в «растянутых» интервалах оказывается только по одной балльной оценке, выраженной натуральным числом, и возникает вопрос, какому из двух (или более) x_i сопоставлять единственный балл y_i. Если возможных исходов x_i для балла y_i число нечетное, например, 3, как в случае

$$y_i = 11 \begin{cases} \nearrow x_i = 9 \\ \longrightarrow x_i = 10 \\ \searrow x_i = 11, \end{cases}$$

то балл естественным образом относится к среднему из альтернативных значений x_i; в данном случае $(y_i = 11) \equiv (x_i = 10)$, как показано в табл. 2.4.4 (шкала пересчета).

При двух альтернативах можно предложить следующее правило: балл y_i относится к тому значению x_i, для которого $f(x_i)$ — наибольшая. В результате, как это сделано в шкале пересчета, «спорные» баллы окончательно сопоставлены тем значениям x_i, которые ближе к «центру рассеивания»:

$$(y_i = 8) \equiv (x_i = 5),$$

$$(y_i = 9) \equiv (x_i = 7),$$

$$(y_i = 12) \equiv (x_i = 12).$$

Теперь достигнуто однозначное соответствие предварительных оценок Y (в баллах) и шкальных оценок X, причем неравные интервалы $\lambda_Y = y_{i+1} - y_i$ путем нормализации по составу отображены в равных интервалах $\lambda_X = x_{i+1} - x$. Заметим, что при этом шкалу Y пришлось «растянуть», так как ее «база» в эксперименте оказалась уже, чем «база» шкалы нормализующей случайной величины X. Рассмотрим второй пример, в котором полученную экспериментально шкалу баллов Y придется, наоборот, «сжимать».

Пример 2.4.3. В столбцах 1—3 табл. 2.4.5 представлено распределение баллов Y, полученное в результате выполнения той же группой в 100 человек еще одного субтеста теста Векслера. Сохраняя нормализующую переменную X той же самой, что и в предыдущем примере, осуществим нормализацию по составу и построим шкалу пересчета Y в X. Процесс преобразования аналогичен рассмотренному, за исключением того, что теперь некоторые плотности $f(y_i)$ складывают, чтобы выполнялось приближенное равенство с какими-либо из нормальных плотностей

Таблица 2.4.5

Исходные данные, нормализация и ее результаты, к примеру 2.4.3.

1	2	3	4	5	6	7
y_i	Частота	Частость $f(y_i)$	$f^*(y_i) \approx f(x_i)$	$y_i \equiv x_i$	$f(x_i)$	x_i
26	1	0,010			—	—
25	2	0,020			0,0015	19
24	4	0,040			0,004	18
23	6	0,060	0,010	26	0,009	17
22	9	0,090	0,020	25	0,018	16
21	4	0,040	0,040	24	0,034	15
20	8	0,080	0,060	23	0,057	14
19	5	0,050	0,090	22	0,081	13
18	6	0,060	0,120	21–20	0,107	12
17	6	0,060	0,110	19–18	0,127	11
16	9	0,090	0,150	17–16	0,133	10
15	12	0,120	0,120	15	0,127	9
14	7	0,070	0,090	14–13	0,107	8
13	2	0,020	0,080	12–11	0,081	7
12	3	0,030	0,050	10	0,057	6
11	5	0,050	0,030	9	0,034	5
10	5	0,050	0,010	8–7	0,018	4
9	3	0,030	0,020	6–5	0,009	3
8	—	—			0,004	2
7	1	0,010			0,0015	1
6	—	—			—	—
5	2	0,020			—	—

Примечание *Так как $\lambda_y = \lambda_x = 1$, то частости $f(y_i)$ и $f(x_i)$ тождественно равны одноименным плотностям.*

$f(x_i)$, а соответствующие интервалы уменьшают, как показано в табл. 2.4.5. Таким образом, здесь имеет место случай *б* (см. рис. 2.4.4).

Сопоставляя плотности в столбцах 4 и 6 табл. 2.4.5, можно видеть, что согласие между ними более хорошее, чем в предыдущем примере, хотя обследовалась одна и та же группа испыту-

емых. Специальное статистическое сопоставление нормализованных и нормальной плотностей будет выполнено ниже (глава 5). Здесь ограничимся констатацией приближенного согласия. Таким образом, снова случайная переменная Y однозначно отображена значениями случайной величины X, нормально распределенной. Шкала пересчета образуется столбцами 5 и 7 табл. 2.4.5.

2.4.3. **Некоторые другие законы распределения, важные для психологии**

Гамма-распределение. Если воздействие одного или нескольких факторов из большого их числа, влияющего на случайную величину X, значительно превосходит по силе воздействия все остальные факторы, то распределение случайной величины X приобретает положительную асимметрию. Плотность вероятности такого распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(x-\mu)^{\alpha-1}\cdot e^{-\beta(x-\mu)} \text{ при } x\geqslant\mu,\ \alpha>0,\ \beta>0\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \quad (2.4.13)$$

Здесь μ — произвольное число, но всегда $\mu\geqslant 0$;

$$\alpha=\frac{(\mathrm{M}[X])^2}{\mathrm{D}[X]} \text{ и } \beta=\frac{\mathrm{M}[X]}{\mathrm{D}[X]}, \quad (2.4.14)$$

где $\mathrm{M}[X]$ — математическое ожидание; $\mathrm{D}[X]$ — дисперсия случайной величины X; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция (см. табл. II Приложения 2), имя которой гамма-распределение и получило.

Уравнение (2.4.13) представляет так называемую *обобщенную* форму гамма-распределения. При $\mu = 0$, либо при подстановке $y = x - \mu$ получается *обычное* гамма-распределение с плотностью

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}\cdot e^{-\beta y},\\ \text{при } y\geqslant 0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \quad (2.4.15)$$

Здесь обозначения те же, что в формулах (2.4.13) и (2.4.14).

Интегральная функция гамма-распределения удовлетворяет уравнению

$$P(Y\leqslant y)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^y y^{\alpha-1}e^{-\beta y}\,dy.$$

Теоретические значения этой функции непосредственно не табулированы и определяются обычно косвенным путем. * Для эмпи-

---

* См., например, Я. Б. Шор и Ф. И. Кузьмин. Таблицы для анализа и контроля надежности. «Советское радио», М., 1968.

рических гистограмм значения кумуляты, характеризующие вероятность $P^*(Y \leqslant y)$, вычисляются аналогично тому, как это было показано для нормального распределения, — по формуле (2.4.5). Сходным образом вычисляются для гамма-распределения оценки значений интеграла вероятностей:

$$P^*(a \leqslant Y \leqslant b) = \sum_{a-0,5\lambda}^{b+0,5\lambda} P^*(y) - 0,5\,[P^*(a) + P^*(b)]. \quad (2.4.16)$$

Здесь $P^*(a \leqslant Y \leqslant b)$ — вероятность случайной величине Y принять значения на конечном отрезке $<a \div b>$, где a и b — средние значения интервалов λ; λ — интервал группировки; $P^*(y)$ — вероятность появления значений y на интервале λ; $P^*(a)$ и $P^*(b)$ — вероятности появления значений y на интервалах со средними значениями a и b соответственно.

При графическом изображении интегральной функции искомая вероятность $P^*(a \leqslant Y \leqslant b)$ для гамма-распределения, как и для других распределений, непосредственно «снимается» с графика в виде

$$P^*(a \leqslant Y \leqslant b) = P^*(Y \leqslant b) - P^*(Y \leqslant a). \quad (2.4.17)$$

Гамма-распределение находит в психологии все более широкое применение благодаря тому, что большинство случайных временных интервалов, так или иначе характеризующих психическую активность, подчиняется именно этому распределению. В частности, время многих реакций человека подчинено гамма-распределению. Ему следуют также общие (суммарные) затраты времени на последовательность рабочих действий, слабо зависящие (или не зависящие) друг от друга, причем величина этих затрат для разных действий может значительно варьировать, согласно условию, сформулированному выше.

Пример 2.4.4. Человек-оператор, взаимодействуя с одной из подсистем обслуживаемой им системы контроля и управления, выполняет разнообразные действия: включение и выключение подсистемы, настройку и переключение рабочих режимов и др. Путем хронометража в натурных условиях получены оценки общих затрат времени на действия операторов с указанной подсистемой, которые в зависимости от числа и специфики действий варьируют от нескольких секунд до нескольких минут. Эмпирический ряд распределения этих затрат времени приведен в первом и втором столбцах табл. 2.4.6. Поскольку длительность некоторых действий человека с подсистемой значительно превышает длительность большинства остальных, можно ожидать, что случайные затраты рабочего времени подчиняются гамма-распределению. Об этом же может свидетельствовать и скошенность ряда распределения влево (положительная асимметрия).

Таблица 2.4.6

Расчет вероятностей по гамма-распределению затрат времени:

$$p^*(t) = 3{,}16 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 \cdot e^{-5{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot t}$$

t, *сек*	$p(t)$	$\lg t$	$3 \lg t$	$0{,}023\, t$	$\lg p^*(t)$	$p^*(t)$
12	0,016	1,0792	3,2376	0,2760	—1,5387	0,029
36	0,216	1,5563	4,6689	0,8280	—0,6594	0,219
60	0,278	1,7782	5,3346	1,3800	—0,5457	0,285
84	0,236	1,9243	5,7729	1,9320	—0,6594	0,219
108	0,129	2,0334	6,1002	2,4840	—0,8841	0,131
132	0,070	2,1206	6,3618	3,0360	—1,1745	0 067
156	0,035	2,1931	6,5793	3,5880	—1,5090	0,031
180	0,015	2,2553	6,7659	4,1400	—1,8744	0,012
204	0,005	2,3096	6,9288	4,6920	—2,2635	0,005
228	0,005	2,3579	7,0737	5,2440	—2,6706	0,002

Примечание. Логарифмируя функцию вероятности гамма-распределения получаем: $\lg p^*(t) = \lg(3{,}16 \cdot 10^{-5}) + 3\lg t - 5{,}3 \cdot 10^{-2}\, t \lg e = -4{,}5003 + 3\lg t - 0{,}023t$. Следовательно, каждое значение $\lg p^*(t)$ в шестом столбце таблицы получено суммированием чисел в четвертом и пятом столбцах, и константы —4,5003.

Так как минимальные затраты времени асимптотически стремятся к нулю *, примем исходной для расчета двухпараметрическую (2.4.15) форму гамма-распределения, согласно которой вероятность затрат времени:

$$p^*(t_i \leqslant T \leqslant t_i + \lambda) = \frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot t_i^{\alpha-1} e^{-\beta t_i}, \qquad (2.4.18)$$

где $\lambda = 24$ *сек* — интервал группировки; T — рабочее время; t_i — среднее значение затрат времени на i-том интервале λ.

Вычислив по методу произведений среднее арифметическое

$$\mathrm{M}[X] = 76{,}7 \text{ сек}$$

и дисперсию затрат времени

$$\mathrm{D}[X] = 1425 \text{ сек}^2,$$

определим по формуле (2.4.14) значения параметров α и β:

$$\alpha = \frac{76{,}7^2}{1425} \approx 4{,}13.$$

Учитывая, что при целых α $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$, округлим $\alpha = 4$, очевидно, без большой потери точности;

$$\beta = \frac{76{,}7}{1425} \approx 0{,}053 \left(\frac{1}{\text{сек}}\right).$$

* Например, отдельный взгляд на средства контроля может длиться десятые доли секунды, что по сравнению с интервалом группировки $\lambda = 24$ *сек* является исчезающе малой величиной.

Заметим, что параметр β в отличие от α имеет размерность скорости и характеризует интенсивность (производительность) действий человека-оператора. Подставляя найденные значения параметров α и β, а также λ в формулу (2.4.16) и обозначая для краткости искомую вероятность $p^*(t_i \leqslant T \leqslant t_i + \lambda) \equiv p^*(t)$, получаем уравнение

$$p^*(t) = \frac{24 \cdot (5{,}3 \cdot 10^{-2})^4}{4!} \cdot t^3 e^{-5{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot t}.$$

Осуществляя преобразования коэффициента при неизвестном:

$$\frac{24(5{,}3 \cdot 10^{-2})^4}{4!} \approx 3{,}16 \cdot 10^{-5},$$

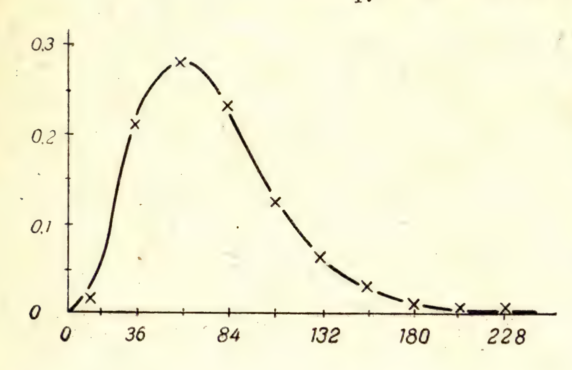


Рис. 2.4.5. Гамма-распределение вероятностей общих затрат времени к примеру 2.4.4.

По оси абсцисс — время t, *сек*; по оси ординат — вероятности $P^*(t)$; крестиками обозначены частости $p(t)$.

окончательно получаем расчетное уравнение

$$p^*(t) = 3{,}16 \cdot 10^{-5} - t^3 e^{-5{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot t}.$$

Вычисление вероятностей по этому уравнению проще всего осуществляется через логарифмы, как показано в табл. 2.4.6. Сопоставляя частости $p(t)$ с вероятностями $p^*(t)$, — столбцы 2 и 7, в табл. 2.4.6, — можно убедиться в неплохом согласии результатов. Гамма-распределение вероятностей общих затрат времени показано на рис. 2.4.5.

Определим далее, пользуясь формулой (2.4.5) и столбцом 7 табл. 2.4.6, значения кумуляты $p^*(T \leqslant t)$, они приведены в табл. 2.4.7. Заметим, что значения кумуляты, соответствующие средним значениям интервалов, определяются по формуле (2.4.5), а соответствующие граничным значениям — по формуле (1.4.11). Можно, конечно, ограничиться одним из способов, но тогда окажется затрудненным практическое использование кумуляты для определения вероятности $p^*(T \leqslant t)$ при любом $t \neq w_i$ или $t \neq g_i$. Кумулята, представленная удвоенным числом значений $p^*(T \leqslant t)$, как в табл. 2.4.7, может быть легко сглажена от руки на графике.

Сглаженная кумулята (рис. 2.4.6) является хорошим приближением к истинной интегральной функции и позволяет непосредственно с графика определять интересующие исследователя

Таблица 2.4.7

Вычисление значений кумуляты по значениям вероятностей из табл. 2.4.6 (7-й столбец)

t, *сек*	$p^*(T \leqslant w_i)$	$p^*(T \leqslant g_i)$	$p^*(T \leqslant t)$
0		0,000	0,000
12×	0,014		0,014
24		0,029	0,029
36×	0,139		0,139
48		0,248	0,248
60×	0,390		0,390
72		0,533	0,533
84×	0,643		0,643
96		0,752	0,752
108×	0,818		0,818
120		0,883	0,883
132×	0,917		0,917
144		0,950	0,950
156×	0 966		0,966
168		0,981	0,981
180×	0,987		0,987
192		0,993	0,993
204×	0,996		0,996
216		0,998	0,998
228×	0,999		0,999
240		1,000	1,000

Примечание. «Крестиками» (×) отмечены средние значения w_i интервалов группировки; g_i — граничные значения интервалов.

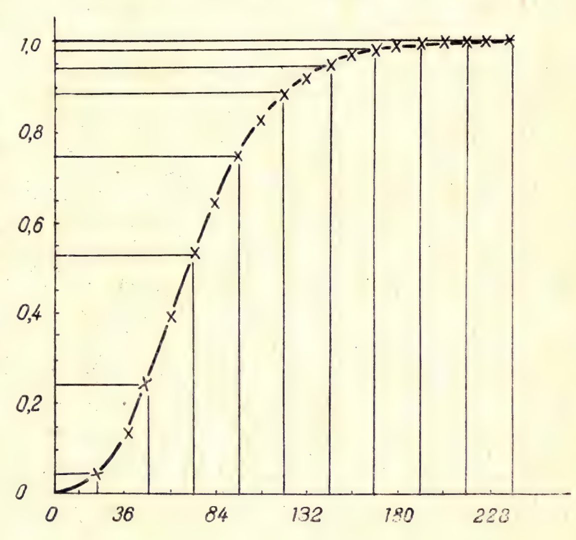


Рис. 2.4.6. Интегральная функция гамма-распределения вероятностей затрат времени, полученная по данным примера 2.4.4 сглаживанием от руки кумуляты, значения которой представлены в табл. 2.4.7 и обозначены «крестиками» на рисунке.

По оси абсцисс — время, *сек*, по оси ординат — вероятности $P^*(T \leqslant t)$.

оценки вероятностей. Например, по рис. 2.4.6 легко определить, что вероятность затрат времени на действия с подсистемой не более минуты составляет почти 0,4, а вероятность затрат времени в пределах одной-двух минут по формуле (2.4.17) составляет

$$p^*(60 \leqslant T \leqslant 120) = p^*(T \leqslant 120) - p^*(T \leqslant 60) \approx$$
$$\approx 0{,}885 - 0{,}385 = 0{,}5,$$

т. е. половина всех затрат времени на обслуживание лежит в этих пределах.

Комбинации трех параметров (α, β, μ) обеспечивают значительное разнообразие кривых, в которых реализуется гамма-распределение. При больших α гамма-распределение приближается к симметричному, почти нормальному виду (например, уже при $\alpha \geqslant 10$). Наоборот, при $\alpha \leqslant 1$ гамма-распределение крайне асимметрично (модой является $y = 0$).

Частным случаем гамма-распределения, при $\alpha = 1$, является так называемое экспоненциальное распределение.

Экспоненциальное распределение. Оно имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} \text{ при } x \geqslant 0, \ \beta > 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.4.19}$$

Здесь $\beta = \frac{\mathrm{M}[X]}{\mathrm{D}[X]}$ и $\mathrm{M}[X]$ — математическое ожидание, а $\mathrm{D}[X]$ — дисперсия случайной величины X.

Интегральная функция экспоненциального распределения определяется как

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x}, \tag{2.4.20}$$

а интеграл вероятности равен

$$P(a \underset{b > a}{\leqslant X \leqslant} b) = F(b) - F(a) = e^{-\beta(a)} - e^{-\beta(b)}. \tag{2.4.21}$$

Для эмпирического ряда показателем того, что его распределение экспоненциальное, служит, помимо крайней асимметрии частостей, равенство среднего арифметического значения и стандартного отклонения

$$\mathrm{M}[X] = \sigma[X]. \tag{2.4.22}$$

Наиболее широко экспоненциальный закон распределения используется в психологических приложениях теории надежности и теории массового обслуживания. В частности, ему следует распределение времени между различными ошибочными действиями человека, выполняющего некоторую работу. В этой связи параметр β называют интенсивностью отказов (ошибок) человека.

Пример 2.4.5. В экспериментах по изучению надежности элементарных вычислительных операций, выполняемых человеком, установлено, что при сложении чисел интенсивность ошибок, остающихся незамеченными и приводящих к неверному результату, составляет $0{,}42 \cdot \frac{1}{мин}$ и остается постоянной в течение 10 минут вычислений *. Считая, что распределение времени между ошибками (t) экспоненциально, можем записать:

$$f(t) = 0{,}42e^{-0{,}42t}$$

и

$$F(t) = 1 - e^{-0{,}42t}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами для вычисления вероятностей, требуются таблицы функций e^{-x}, либо — логарифмов. Логарифмируя плотность, получаем:

$$\lg f(t) = \lg 0{,}42 - 0{,}42 \lg et = -0{,}3768 - 0{,}42 \cdot 0{,}4343t.$$

Например, требуется определить вероятность того, что на интервале $1 \pm 0{,}02$ *мин* появится незамеченная ошибка. Так как $\lambda \approx 1$, то

$$p(0 \leqslant T \leqslant 1 \pm 0{,}02) \approx f(t),$$

$$\lg f(t) = -0{,}3768 - 0{,}1824 = -0{,}5592.$$

Потенцируя, определяем $f(1) = 0{,}276$.

Пусть далее требуется оценить вероятность того, что скрытая ошибка появится не позже, чем через 1 *мин* после начала сложения. Преобразуя интегральную функцию, логарифмируем ее:

$$\lg [1 - F(t)] = -\beta t \lg e = -0{,}4343\beta t;$$

и подставляем $\beta = 0{,}42$ и $t = 1$:

$$\lg [1 - F(t = 1)] = -0{,}4343 \cdot 0{,}42 \cdot 1 = -0{,}1824 = \bar{1}{,}8176, \text{ откуда}$$

$$\text{antilg}(\bar{1}{,}8176) = 1 - F(t = 1) = 0{,}658,$$

следовательно, искомая вероятность

$$p(T \leqslant 1 \text{ мин}) = F(t = 1 \text{ мин}) = 1 - 0{,}658 = 0{,}342.$$

Биномиальное распределение. Пусть выполняется n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться некоторое случайное событие А, безусловная вероятность появления которого постоянна и равна Р, а вероятность его непоявления равна 1 — Р. Последовательность событий, образованная таким образом, называется последовательностью Бернулли; она рассматривалась выше.

---

* Н. М. Кандарацкова, Г. В. Суходольский. Об эффективности и надежности элементарных вычислительных операций. В сб.: Экспериментальная и прикладная психология, вып. 1. Изд. ЛГУ, 1968.

Вероятность $P_{n,m}$ того, что в последовательности Бернулли длиной в n испытаний некоторое событие А появится ровно m раз, равна коэффициенту при неизвестном x^m в разложении бинома $[px + (1 - P)]^n$ по степеням x:

$$P_{n,m} = C_n^m \cdot P^m (1-P)^{n-m}, \qquad (2.4.21)$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ — число сочетаний из n элементов по m.

Математическое ожидание числа благоприятных исходов (m) определяется величиной

$$\mathrm{M}[m] = nP,$$

а дисперсия — произведением

$$\mathrm{D}[m] = nP(1-P).$$

Учитывая, что m — натуральное число, или нуль, очевидно, следует округлять значения обоих параметров до целой части: *

$$\mathrm{M}[m] = \mathrm{ant}\,\{nP\} \qquad (2.4.22а)$$

и

$$\mathrm{D}[m] = \mathrm{ant}\,\{nP(1-P)\}. \qquad (2.4.22б)$$

В психологической практике биномиальное распределение используется всегда, когда требуется определить априорную вероятность появления изучаемого события в серии независимых испытаний известной длины. В частности, известные попытки «доказать» существование телепатической связи основываются на сравнении вероятности ответов перцепиента с априорной вероятностью случайного угадывания, вычисляемой по биномиальному распределению. Аналогичное сравнение проводится в исследованиях обнаружения пороговых стимулов и вообще там, где требуется установить зависимость (или независимость) возможности появления какого-либо события от определенных факторов.

Пусть, например, имеется алфавит (полная группа) из десяти событий A_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$), причем вероятность одного из них, события A_3, составляет 0,1. Очевидно, вероятность непоявления этого события (что эквивалентно появлению любого из остальных девяти событий) равна 0,9. Определим, считая появление событий в последовательности испытаний независимым,

---

* Принято считать биномиальный закон — распределением существенно дискретной переменной, что, очевидно, связано с его преимущественным использованием в схеме Бернулли. Но биномиальное распределение можно использовать и для любых неотрицательных n и m (при $m \leqslant n$), заменяя факториалы первого сомножителя на гамма-функции:

$$Pn,\ m = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\cdot\Gamma(n-m+1)}\ P^m (1-P)^{n-m},$$

где параметры m и n могут иметь смысл времени.

вероятности $P_{n,m}$ событию A_3 появиться ровно m раз из n, где $n = 10$, а $m = 1, 2, \ldots, 10$:

$$P_{10,0} = \frac{10!}{0!10!} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0,9^{10} \approx 0,35,$$

$$P_{10,1} = \frac{10!}{1!9!} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9 \approx 10 \cdot 0,1 \cdot 0,387 \approx 0,39,$$

$$P_{10,2} = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^8 \approx 45 \cdot 0,01 \cdot 0,43 \approx 0,19,$$

$$P_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^7 \approx 120 \cdot 0,001 \cdot 0,478 \approx 0,06,$$

$$P_{10,4} = \frac{10!}{4!6!} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^6 \approx 210 \cdot 0,0001 \cdot 0,531 \approx 0,01,$$

$$P_{10,5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^5 \approx 252 \cdot 0,00001 \cdot 0,59 \approx 0,002,$$

$$P_{10,6} = \frac{10!}{6!4!} \cdot 0,1^6 \cdot 0,9^4 \approx 210 \cdot 0,000001 \cdot 0,656 \approx 0,0001.$$

Можно видеть, что вероятность независимого последовательного появления в серии из 10 испытаний одного из десяти событий, имеющего фиксированную вероятность осуществления 0,1, быстро уменьшается, так что уже шестикратное появление A_3 можно практически рассматривать как событие невозможное. Если бы теперь в некоторых условиях, от опыта к опыту, событие A_3 появлялось бы более чем 6 раз из 10 испытаний, то это свидетельствовало бы о том, что появление A_3 зависит от условий опыта, и схема Бернулли неадекватна.

Различные комбинации значений параметров n и m приводят к большому разнообразию форм биномиального распределения. При $n < 20$ асимметрия распределения обычно ярко выражена; она положительна при $p \ll 0,5$, отрицательна при $p \gg 0,5$; при $p = 0,5$ распределение симметрично. При $n > 20$ биномиальное распределение для любых, но не очень малых P симметрично и асимптотически приближается к нормальному с параметрами $M[X] = nP$ и $\sigma^2[X] = nP(1 - P)$.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 3.1. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1.1. Система из двух случайных величин

Две случайные величины, рассматриваемые вместе, образуют систему. Пусть случайная величина X задана совокупностью своих значений x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), а случайная величина Y — совокупностью значений y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Каждую из случайных величин можно изобразить совокупностью точек на числовой оси, как делали раньше. Но две случайные величины, рассматриваемые вместе, условимся изображать на двух взаимно-перпендикулярных осях — горизонтальной оси X и вертикальной оси Y. Тогда событие, состоящее в совместном появлении какой-либо пары значений x_iy_j этих величин изображается на плоскости в системе прямоугольных координат точкой A_{ij}. Так как величины X и $У$ случайным образом принимают свои значения, то появление любой пары значений x_iy_j — это случайное событие. Поэтому точка A_{ij} случайным образом располагается на плоскости $XOУ$ и называется *случайной точкой*. Следовательно, множеству из n пар значений x_iy_j случайных величин X и Y соответствует n случайных точек на плоскости XOY (рис. 3.1.1, *а*).

Соединяя точку A_{ij} с началом координат, получим вектор $\overrightarrow{OA}_{ij}$, длина и направление которого случайны (см. рис. 3.1.1, *б*). Поэтому систему из двух случайных величин называют *случайным вектором* на плоскости. А так как плоскость имеет два измерения, то говорят о *двумерной* системе случайных величин.

Совместное рассмотрение двух случайных величин в психологических приложениях может означать, во-первых, их принадлежность одному и тому же индивиду, во-вторых, одновременную принадлежность совокупности индивидов и, в-третьих, принадлежность этих величин совокупности индивидов, рассматриваемой в течение двух различных периодов времени. Так, попарное изучение возрастных особенностей психических качеств личности приводит к тому, что на протяжении длительного исследования у одного и того же индивида для каждой парыX и Y определяется совокупность числовых значений x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) и y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), которые характеризуют возрастные уровни

проявления изучаемых качеств личности. Например, раз в полугодие, на протяжении всего периода дошкольного, школьного и вузовского обучения ($\approx$ 20 лет) у индивида измеряются объем непосредственного запоминания (X) и объем внимания (Y). Тогда обе случайные величины X и Y оказываются заданными сорока парами значений $x_i y_j$.

Попарное изучение психических качеств людей может осуществляться на протяжении сравнительно небольшого периода времени у группы людей, числом n. В результате снова для любой пары качеств, измеримой в виде случайных величин X и Y, получается совокупность из n пар значений $x_i y_j$.

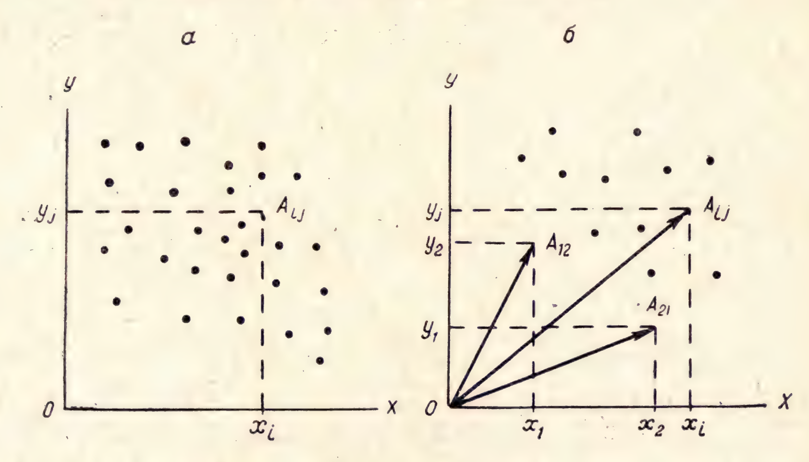


Рис. 3.1.1. Случайная точка (*а*) и случайный вектор (*б*), изображающие систему из двух случайных величин X и Y.

К двумерной системе случайных величин приводит также изучение у группы из n людей одного и того же психического явления (количественно определяемого в виде случайной величины), но измеряемого в течение двух равных периодов времени или, что то же самое, при двух разных комплексах условий.

Случайные величины в системе характеризуются теми же свойствами, что и отдельная случайная величина. Это — положение и рассеивание значений на числовой оси, а также скошенность и крутость. Однако свойства системы не исчерпываются свойствами образующих ее величин. В системе появляются новые свойства: ее положение и рассеивание на плоскости (рис. 3.1.2), ее асимметрия и крутость, а также связь между отдельными случайными величинами. Таким образом, количественные характеристики двумерной системы должны охватывать как систему в целом, так и отдельные составляющие ее случайные величины.

Все количественные характеристики в двумерной системе, так же как и для одной случайной величины, принято делить

на функции распределения и на числовые характеристики, являющиеся параметрами функций распределения.

Двумерная система случайных величин характеризуется тремя видами законов распределения:

1) законом совместного распределения вероятностей значений $x_i y_j$ случайных величин X и Y («двумерный» закон распределения, закон распределения «на плоскости»);

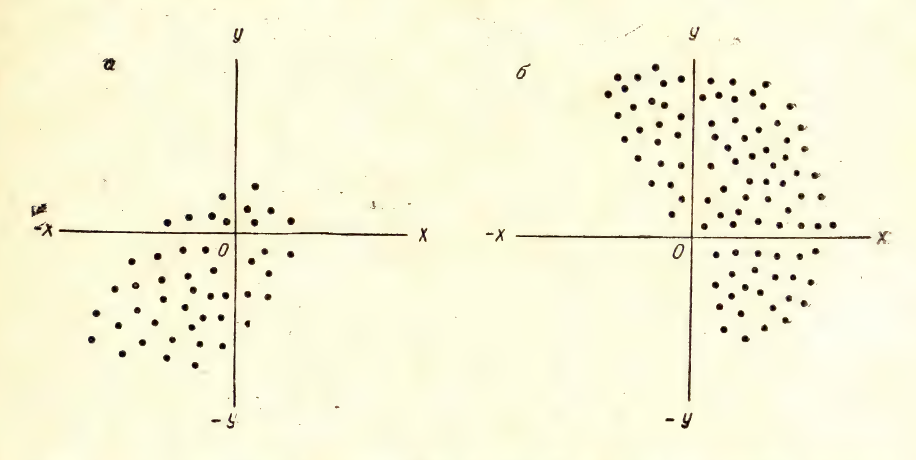


Рис. 3.1.2. Положение и рассеивание в системе из двух случайных величин X и Y.

Совокупности случайных точек схематически изображают возможные различия этих свойств: *а* — система расположена в квадранте III; *б* — система расположена в квадранте I; рассеивание значений здесь больше, чем в случае *а*, так как точки занимают бо́льшую площадь.

2) двумя *безусловными* законами распределения, соответственно — величины X и величины Y;

3) совокупностью *условных* законов распределения вероятностей значений одной из случайных величин, при условии, что другая приняла фиксированное (конкретное) значение.

3.1.2. Закон совместного распределения двух случайных величин

Полной количественной характеристикой двумерной системы является закон совместного распределения вероятностей значений $x_i y_j$ случайных величин X и Y.

Если X и Y — дискретные переменные, то вероятность совместного появления пары значений $x_i y_j$ — обозначим ее $P(x_i y_j)$ — может быть изображена в виде перпендикуляра, восстановленного в точке плоскости XOY, имеющей координаты $(x_i y_j)$. Высота перпендикуляра равна $P(x_i y_j)$. Совокупность таких вероятностей, сопоставленная совокупности возможных пар значений дискретных случайных величин, образует закон совместного распределе-

ния этих величин в форме, аналогичной дифференциальной функции распределения. Здесь вероятности $P(x_i y_j)$ могут быть подробнее записаны так:

$$P(x_i y_j) \equiv P[(X = x_i)(Y = y_j)],$$

где $(X = x_i)(Y = y_j)$ — конъюнкция событий, состоящих в том, что дискретные величины X и Y приняли конкретные значения x_i и y_j.

Другая форма закона совместного распределения двух дискретных случайных величин (аналогичная интегральной функции), задается совокупностью вероятностей

$$P[(X \leqslant x_i)(Y \leqslant y_j)],$$

сопоставленных всевозможным парам значений этих величин:

$$P[(X \leqslant x_i)(Y \leqslant y_j)] = \sum_{i=1}^{x} \sum_{j=1}^{y} P[(X = x_i)(Y = y_j)], \qquad (3.1.1)$$

где суммирование выполняется для всех $X \leqslant x_i$ и $Y \leqslant y_j$. Считая, что совокупность всех возможных пар значений $x_i y_j$ образует полную группу, очевидно, имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P[(X = x_i)(Y = y_j)] = 1, \qquad (3.1.2)$$

поэтому

$$0 \leqslant P[(X \leqslant x_i)(Y \leqslant y_j)] \leqslant 1.$$

Обе формы закона совместного распределения вероятностей могут быть заданы таблицей (см. табл. 3.1.1) и графически (см. рис. 3.1.3), а также аналитически в виде формулы.

Таблица 3.1.1

В пояснение понятия закона совместного распределения двух дискретных случайных величин X и Y

		$P[(X = x_i)(Y = y_j)]$			$P[(X \leqslant x_i)(Y \leqslant y_j)]$		
		значения x_i величины X			значения x_i величины X		
		1	2	3	1	2	3
Значения y_j величины Y	1	1,10	0,10	0,13	0,10	0,20	0,33
	2	0,16	0,07	0,10	0,26	0,43	0,66
	3	0,07	0,16	0,10	0,33	0,66	0,99

Примечание. Для простоты мы ограничились тем, что случайные величины X и Y принимают только три значения (1, 2 и 3), вероятности которых произвольно заданы.

Для квантованных непрерывных случайных величин X и Y, принимающих значения на интервалах λ_X и λ_Y соответственно, можем рассматривать вероятность $P\ [(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_X) \times \times (y_j \leqslant Y \leqslant y_j + \lambda_y)]$ совместного появления пары значений $x_i\ y_j$ на прямоугольном участке площади со сторонами λ_X и λ_Y. Эта

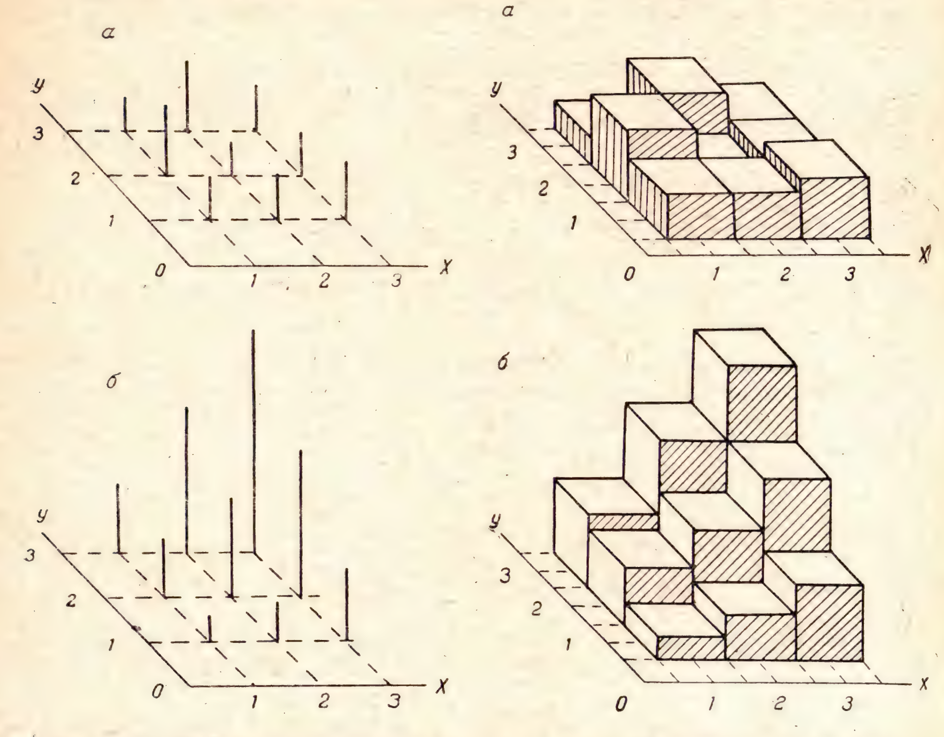


Рис. 3.1.3. Пространственные столбиковые диаграммы, изображающие вероятности, приведенные в табл. 3.1.1.

$а—P\ [(X=x_i)\ (Y=y_i)]$ и $б—P[(X \leqslant x_i)(Y \leqslant y_i)]$. Масштаб $б$ по вертикали уменьшен вдвое.

Рис. 3.1.4. Призмограмма (*а*) и кумулятивная призмограмма (*б*, вертикальный масштаб уменьшен вдвое), соответствующие вероятности в таблице 3.1.2.

вероятность геометрически может быть определена объемом прямоугольной призмы с высотой $f\ (x_i y_j)$ и основанием $\lambda_X\ \lambda_Y$:

$$P\ [(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_X)\ (y_j \leqslant Y \leqslant y_j + \lambda_Y)] = P_{ij} = f\ (x_i y_j) \cdot \lambda_X \lambda_Y. \tag{3.1.3}$$

Совокупность таких вероятностей (P_{ij}), сопоставленная совокупности пар интервалов $\lambda_X \lambda_Y$, образует закон совместного распределения вероятностей значений $x_i y_j$ квантованных непрерывных случайных величин X и Y и геометрически изображается в виде *призмограммы* (рис. 3.1.4, *а*).

Суммируя вероятности (3.1.3) по x_i и по y_j, определяем вероятность совместного выполнения неравенств $X \leqslant x_i$ и $Y \leqslant y_j$:

$$P[(X \leqslant x_i)(Y \leqslant y_j)] = \sum_{i=1}^{x} \sum_{j=1}^{y} P_{ij}. \qquad (3.1.4)$$

Очевидно, как и для дискретной величины:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1,$$

где n — количество интервалов квантования λ_X и λ_Y.

Совокупность вероятностей (3.1.4), сопоставленная совокупности пар интервалов $\lambda_X \lambda_Y$, образует «интегральную» форму закона распределения; геометрически она определяется в виде *кумулятивной призмограммы* (рис. 3.1.4, *б*).

Значения вероятностей (3.1.3) и (3.1.4), по которым построены призмограммы на рис. 3.1.4, приведены в табл. 3.1.2.

Таблица 3.1.2

Значения вероятностей, по которым построены призмограммы

а) Вероятности $P_{ij} = P[(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_X)\ (y_j \leqslant Y \leqslant y_j + \lambda_Y)]$ призмограммы (рис. 3.1.4а)

		$x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_x$: 0,5 ÷ 1,5	1,5 ÷ 2,5	2,5 ÷ 3,5	$\sum_{i=1}^{n} P_{ij} = P_j$
$y_j \leqslant Y \leqslant y_j + \lambda_Y$	0,5 ÷ 1,5	0,10	0,10	0,13	0,33
	1,5 ÷ 2,5	0,16	0,07	0,10	0,33
	2,5 ÷ 3,5	0,07	0,16	0,10	0,33
$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = P_i$		0,33	0,33	0,33	0,99

б) Вероятности $P[(X \leqslant x_i)\ (Y \leqslant y_j)]$ кумулятивной призмограммы (рис. 3.1.4б)

		$X \leqslant x_i$: 1	2	3
$Y \leqslant y_j$	1	0,10	0,20	0,33
	2	0,26	0,43	0,66
	3	0,33	0,66	0,99

Величина $f(x_i y_j)$ в уравнении (3.1.3) называется *двумерной плотностью вероятности*. Она характеризует как бы «массу» вероятности, приходящейся на «единичный» прямоугольный «элемент» площади XOY, и численно равна высоте элементарной призмы на призмограмме (рис. 3.1.4, *а*).

Если рассматривать бесконечно малые значения интервалов квантования dx и dy, то вероятность непрерывным случайным величинам X и Y принять значения на элементарном прямоугольнике площадью $dx \cdot dy$ записывается так:

$$P[(x \leqslant X < x + dx) \times \times (y \leqslant X < y + dy)] = = f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (3.1.5)$$

где $f(x, y)$ — теоретическая *функция двумерной плотности*, $dx > 0$ и $dy > 0$. Функция двумерной плотности геометрически представляет собой некоторую поверхность, рельеф которой может быть любым (так же, как и рельеф местности). Наиболее изученными являются выпуклые симметричные функции двумерной плотности, подчиняющиеся закону Гаусса.

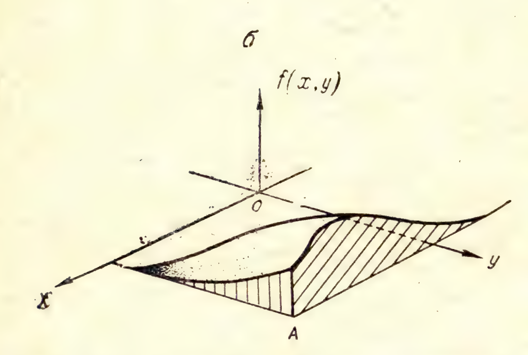


Рис. 3.1.5. Геометрическая интерпретация функции двумерного распределения.

а — заштрихована площадь фигуры, удовлетворяющая совместному решению неравенств $(X \leqslant x_i)$ и $(Y \leqslant y_j)$; *б* — объем пространства, изображающий вероятность $P[(X < x)\ (Y < y)] = F(x, y)$, согласно уравнению (3.1.6), где x и y — координаты точки A.

Интегрируя плотность $f(x, y)$ по x и по y, получают (интегральную) *функцию двумерного распределения*:

$$F(x, y) = \int_{x_{\min}}^{x} \int_{y_{\min}}^{y} f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (3.1.6)$$

где

$$F(x, y) = P[(X < x)(Y < y)].$$

Геометрически $F(x, y)$ — это объем пространства, ограниченного сверху поверхностью распределения $f(x, y)$, а снизу — площадью фигуры, образованной совместно выполняемыми неравенствами $X < x$ и $Y < y$ (см. рис. 3.1.5).

3.1.3. Безусловные и условные законы распределения

Интегрируя двумерную плотность вероятности по переменной Y, получаем безусловную плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x, y)\, dy,$$

которая характеризует X при всех возможных $(y_{\min} \div y_{\max})$ значениях случайной величины Y.

Практически, оперируя с эмпирическими плотностями и частостями (вероятностями), осуществляют суммирование

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j)\, \lambda_y$$

и

$$p[x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_x] = \sum_{j=1}^{n} p[(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_x)(y_j \leqslant Y \leqslant y_j + \lambda_y)],$$

что коротко будем записывать так:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \qquad (3.1.7а)$$

где p_i — безусловная частость (вероятность) случайной величине X принять значение на интервале λ_X (при всех значениях величины Y); p_{ij} — частости появления всевозможных значений y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) совместно со значением x_i (i — фиксировано). Аналогично определяются:

— теоретическая безусловная плотность распределения переменной Y при всех значениях переменной X (от $x_{\min}$ до $x_{\max}$)

$$f(y) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x, y)\, dx;$$

— эмпирическая плотность

$$f(y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i y_j)\, \lambda_x;$$

— безусловная частость (вероятность)

$$p[y_j \leqslant Y \leqslant y_j + \lambda_y] = \sum_{i=1}^{n} p[(x_i \leqslant X \leqslant x_i + \lambda_x)(y_j \leqslant Y \leqslant y_j + \lambda_y)],$$

что коротко будем записывать так:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, \qquad (3.1.7б)$$

где p_j — безусловная частость (вероятность) случайной величине Y принять значения на интервале λ_y (при всех значениях величины X); p_{ij} — определена выше.

Совокупность частостей (вероятностей) p_i, сопоставленная совокупности интервалов λ_x, на которых случайная величина X принимает свои значения x_i, образует эмпирический ряд безусловного распределения вероятностей случайной величины X в двумерной системе. Точно также, совокупность частостей (вероятностей) p_j, сопоставленная совокупности интервалов λ_y, образует эмпирический ряд безусловного распределения вероятностей случайной величины Y в той же системе. Оба ряда представлены, например, в последних строке и столбце табл. 3.1.2а.

Кроме совместного и безусловных распределений в двумерной системе существуют так называемые *условные* распределения. Эти распределения образованы условными вероятностями появления значений одной из величин, при условии, что другая величина приняла значение на каком-либо из своих интервалов квантования.

Как и для случайных событий, вероятность совместного появления пары значений $x_i y_j$ определяется произведением безусловной вероятности появления одного из значений на условную вероятность другого значения при условии, что первое появилось:

$$P(x_i y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j/x_i) = P(y_j) \cdot P(x_i/y_j)$$

или короче:

$$P_{ij} = P_i \cdot P(j/i) = P_j \cdot P(i/j), \qquad (3.1.8)$$

где $P_{ij} = P(x_i y_j)$ — вероятность совместного появления любой пары значений на элементе площади со сторонами λ_X и λ_Y; $P_i = P(x_i)$ и $P_j = P(y_j)$ — безусловные вероятности появления значений x_i на интервале λ_X и y_j на интервале λ_y соответственно; $P(i/j) = P(x_i/y_j)$ и $P(j/i) = P(y_j/x_i)$ — условные вероятности величине Xпринять значение x_i на λ_X при условии, что величина Y приняла значение y_j на λ_Y, и величине Y принять значение y_j на λ_Y при условии, что величина X приняла значение x_i на λ_X соответственно.

Совокупность условных вероятностей (частостей), сопоставленная совокупности интервалов λ одной случайной величины, соответствующих некоторому интервалу значений другой случайной величины, образует ряд условного распределения вероятностей.

Каждая из случайных величин в двумерной системе имеет столько условных распределений, на сколько интервалов λ квантована другая случайная величина. Чаще всего обе величины квантованы на одинаковое количество n интервалов λ. Тогда всего в двумерной системе насчитывается $2n$ условных распределений.

3.1.4. Взаимосвязь случайных величин в двумерной системе

Из уравнения (3.1.8) следует, что условные вероятности определяются отношениями

$$P(i/j) = \frac{P_{ij}}{P_j}, \qquad (3.1.9а)$$

$$P(j/i) = \frac{P_{ij}}{P_i}. \qquad (3.1.9б)$$

Обобщая (3.1.8) и (3.1.9а, б), можем написать уравнения, связывающие плотности вероятностей:

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y/x) = f(y) \cdot f(x/y),$$

откуда

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \text{ и } f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}.$$

Аналогичные равенства можно записать и для функций распределения:

$$F(x, y) = F(x) \cdot F(y/x) = F(y) \cdot F(x/y),$$

откуда

$$F(y/x) = \frac{F(x, y)}{F(x)} \text{ и } F(x/y) = \frac{F(x, y)}{F(y)}.$$

Учитывая уравнения (3.1.7а, б), можно, действительно, утверждать, что двумерная плотность вероятности полностью определяет количественно систему двух случайных величин, так как из нее можно определить и безусловные, и все условные плотности. Но чтобы получить двумерную плотность, необходимо знать безусловную плотность вероятности одной из случайных величин и все условные плотности другой случайной величины. Это практически важный вывод, так как всегда можно организовать экспериментально-психологическое исследование таким образом, чтобы регистрировались совместные появления пар значений изучаемых психических переменных. Основываясь на условиях зависимости и независимости случайных событий, можно сформулировать такие условия и для случайных величин X и Y в системе.

Условия *независимости* случайных величин X и Y, рассматриваемых совместно, заключаются в том, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} f(x/y) = f(x) \text{ при любых наблюдаемых } y, \\ f(y/x) = f(y) \text{ при любых наблюдаемых } x. \end{cases} \qquad (3.1.10а)$$

Или, для вероятностей:

$$\left. \begin{aligned} P(i/j) = P_i \text{ при всех } j, \\ P(j/i) = P_j \text{ при всех } i. \end{aligned} \right\} \qquad (3.1.10б)$$

Случайные величины X и Y *взаимозависимы*, если хотя бы для одного из значений одной случайной величины условная плотность отличается от безусловной плотности.

Поясним соотношения плотностей распределений в двумерной системе и условия независимости несложным примером. В табл. 3.1.3 представлены вероятности совместного появления

Таблица 3.1.3

В пояснение соотношений между плотностями вероятностей в двумерной системе

y_j x_i	λ_1	λ_2	λ_3	$\sum_{i=1}^{3} P_{ij}=P_j$
λ_1	0,06	0,10	0,04	0,2
λ_2	0,15	0,25	0,10	0,5
λ_3	0,09	0,15	0,06	0,3
$\sum_{j=1}^{3} P_{ij}=P_i$	0,3	0,5	0,2	1,0

P_{ij} и безусловные вероятности P_i и P_j для величин X и Y, квантованных на 3 интервала каждая. Используя равенства (3.1.9а и б), вычислим условные вероятности $P\ (i/j)$ и $P\ (j/i)$, как показано в табл. 3.1.4.

Таблица 3.1.4

Условные распределения в системе $\{X,\ Y\}$

y_j x_i	λ_1	λ_2	λ_3
λ_1	$\frac{0,06}{0,2}=0,3$ $\frac{0,06}{0,3}=0,2$	$\frac{0,10}{0,2}=0,5$ $\frac{0,10}{0,5}=0,2$	$\frac{0,04}{0,2}=0,2$ $\frac{0,04}{0,2}=0,2$
λ_2	$\frac{0,15}{0,5}=0,3$ $\frac{0,15}{0,3}=0,5$	$\frac{0,25}{0,5}=0,5$ $\frac{0,25}{0,5}=0,5$	$\frac{0,10}{0,5}=0,2$ $\frac{0,10}{0,2}=0,5$
λ_3	$\frac{0,09}{0,3}=0,3$ $\frac{0,09}{0,3}=0,3$	$\frac{0,15}{0,3}=0,5$ $\frac{0,15}{0,5}=0,3$	$\frac{0,06}{0,3}=0,2$ $\frac{0,06}{0,2}=0,3$

Примечание. В прямоугольниках: сверху — условные вероятности $P\ (i/j)=\frac{P_{ij}}{P_j}$, внизу — условные вероятности $P\ (j/i)=\frac{P_{ij}}{P_i}$.

Сравнивая ряд распределения безусловных вероятностей P_i, записанных в последней строке табл. 3.1.3, с рядами распределения условных вероятностей $P(i/j)$, записанных сверху в каждой строке табл. 3.1.4, можем убедиться, что

$$P_i = P(i/j) \qquad \text{для всех } j.$$

Также убеждаемся в том, что

$$P_j = P(j/i) \qquad \text{для всех } i,$$

т. е. случайные величины X и Y стохастически независимы.

§ 3.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛОЖЕНИЯ, РАССЕИВАНИЯ И СВЯЗИ

Каждое из распределений, имеющих место в двумерной системе, характеризуется теми же общими свойствами, что и распределение одной случайной величины. Однако чаще всего используют симметричные двумерные распределения, нормальные, либо близкие нормальному. И по этой причине рассматривают преимущественно характеристики положения, рассеивания и связи между величинами. Характеристики положения и рассеивания делятся на числовые и функциональные.

3.2.1. Числовые характеристики положения и рассеивания

В качестве числовых характеристик (мер) положения используются главным образом средние арифметические значения.

Положение совместного распределения на плоскости XOY характеризуется точкой с координатами (М $[X]$, М $[Y]$), где М $[X]$ — *безусловное среднее* арифметическое значение, характеризующее положение безусловного распределения случайной величины X на числовой оси x-ов; М $[Y]$ — *безусловное среднее* арифметическое значение, характеризующее положение безусловного распределения случайной величины Y на числовой оси y-ов. В дальнейшем для краткости будем называть М $[X]$ — безусловным средним от X, а М $[Y]$ — безусловным средним от Y.

Положение условного распределения x/y_j на плоскости XOY характеризуется точкой с координатами (М $[x/y_j]$, y_j), где y_j — фиксированное значение случайной величины Y, относительно которого рассматривается условное распределение величины X; М $[x/y_j]$ — *условное среднее* арифметическое значение величины X при фиксированном значении y_j (сокращенно: условное среднее «X по y_j»).

Положение условного распределения y/x_i на плоскости XOY также определяется точкой с координатами (x_i, М $[y/x_i]$), где x_i — фиксированное значение случайной величины X, относительно которого рассматривается условное распределение величины Y, М $[y/x_i]$ — *условное среднее* арифметическое значение случайной

величины Y при фиксированном значении x_i. Это условное среднее «Y по x_i» и определяет положение условного распределения относительно оси y-ов.

Условных средних $M[x/y_j]$ и $M[y/x_i]$ в двумерной системе столько же, сколько условных распределений рассматривается.

Безусловные и условные средние арифметические значения аналитически определяются по тем же «понятийным» формулам, которые были рассмотрены для отдельной случайной величины. Расчетные формулы будут даны ниже. В качестве числовых характеристик (мер) рассеивания для каждого из рассмотренных распределений преимущественно используются дисперсии и стандартные отклонения.

Рассеивание двумерного распределения характеризуется двумя дисперсиями и соответственно двумя стандартными отклонениями:

$$D[X] \text{ и } \sigma[X] = \sqrt{D[X]},$$

$$D[Y] \text{ и } \sigma[Y] = \sqrt{D[Y]},$$

где $D[X]$ — безусловная (общая) дисперсия случайной величины X при всех значениях величины (Y); $\sigma[X]$ — безусловное стандартное отклонение случайной величины X; $D[Y]$ — безусловная (общая) дисперсия случайной величины Y (при всех значениях величины X); $\sigma[Y]$ — безусловное стандартное отклонение Y.

Рассеивание любого условного распределения характеризуется условной дисперсией и условным стандартным отклонением. Будем обозначать, $D[x/y_j]$ — (условную) дисперсию условного распределения x/y_j, $\sigma[x/y_j] = \sqrt{D[x/y_j]}$ — соответствующее стандартное отклонение $D[y/x_i]$ — (условную) дисперсию условного распределения y/x_i, $\sigma[y/x_i] = \sqrt{D[y/x_i]}$ — соответствующее стандартное отклонение.

Безусловные и условные дисперсии аналитически определяются теми же «понятийными» формулами, что и дисперсия отдельной случайной величины. Расчетные формулы рассмотрим ниже.

3.2.2. Простые регрессии

Функцию, связывающую какой-нибудь параметр условных распределений одной случайной величины со значениями другой случайной величины, будем называть (простой) *регрессией*. В двумерной системе различают регрессии «Y на X» и регрессии «X на Y».

Обычно рассматривают только параметр положения — условные средние арифметические значения одной величины в функции от значений другой. Тогда регрессия «Y на X» (или y/x_i) — это геометрическое место условных средних $M[y/x_i]$, соответствующих значениям x_i, которые принимает случайная величина X на интервалах квантования λ_X (рис. 3.2.1,*а*). Будем обозначать эту регрессию $y_X = \psi(x_i)$. Другая регрессия — $x_Y = \varphi(y_j)$ — это геометрическое место условных средних $M[x/y_j]$, соответствующих

значениям y_j, которые случайная величина Y принимает на своих интервалах квантования λ_Y.

В психологических исследованиях, наряду с регрессиями условных средних, существенное значение могут иметь регрессии других параметров условных законов распределения: дисперсий,

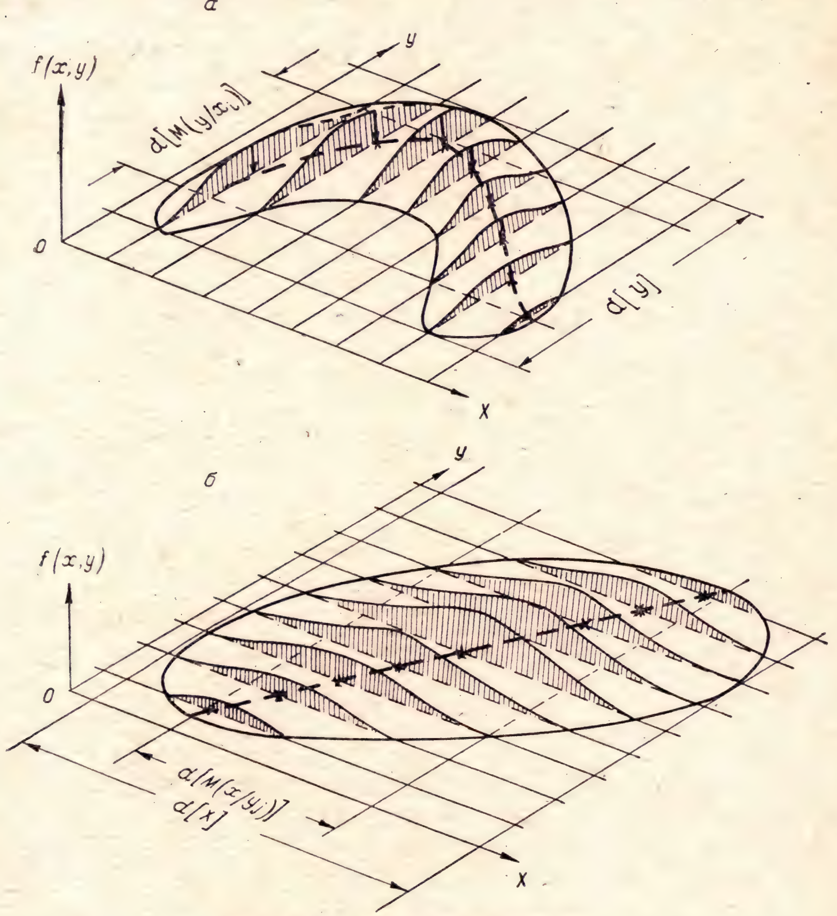


Рис. 3.2.1. Простые регрессии.

а—нелинейная регрессия. Заштрихованы условные плотности вероятности $f(y/x_i)$. Крестиками на плоскости XOY обозначены условные средние $M(y/x_i)$; соединяющая их кривая (жирный пунктир)—это нелинейная регрессия $y_x = \psi(x)$; $d[M(y/x_i)]$ — размах распределения условных средних $M(y/x_i)$; $d[Y]$—размах безусловного распределения Y; *б*—линейная регрессия. Заштрихованы условные плотности вероятности $f(x/y_j)$. Точками на плоскости XOY обозначены условные средние $M(x/y_j)$; соединяющая их пунктирная прямая—это линия регрессии $x_y = \varphi(y)$; $d[M(x/y_j)]$—размах распределения условных средних $M(x/y_j)$; $d[X]$—размах безусловного распределения X.

стандартных отклонений и размахов, коэффициентов асимметрии и т. д. Например, для условных стандартных отклонений это будут регрессии

$$\sigma[y/x_i] = \psi(x_i) \text{ и } \sigma[x/y_j] = \varphi(y_j).$$

Здесь в общем виде рассмотрим простую регрессию $u = \xi(z)$, в которой u — некоторый параметр одной из случайных величин (условное среднее, условная дисперсия, стандартное отклонение и т. д.); z — значения другой случайной величины в рассматриваемой системе, а ξ — функция, устанавливающая соответствие между z как независимой и u как зависимой переменными.

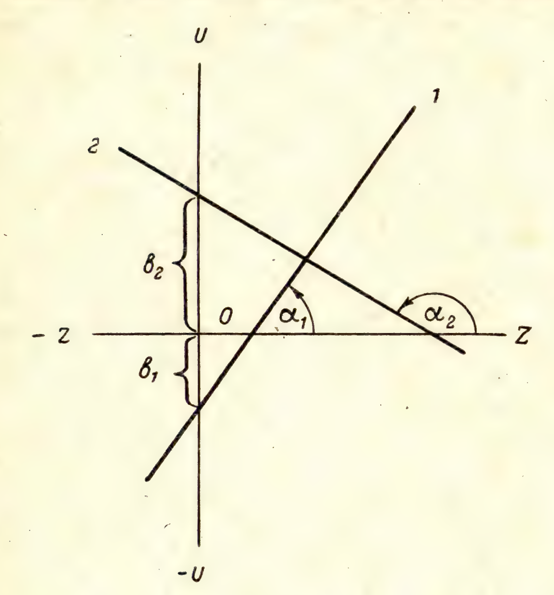


Рис. 3.2.2. Геометрическая интерпретация линии регрессии $u = az + b$.

1 — случай, когда $a > 0$, но $b < 0$; *2* — случай, когда $a < 0$, но $b > 0$.

По виду функции ξ все регрессии подразделяются на два класса: линейных и нелинейных регрессий.

Линейная регрессия в системе прямоугольных координат ZOU имеет вид прямой линии (рис. 3.2.2) и описывается уравнением

$$u = az + b, \tag{3.2.1}$$

где b — свободный член, характеризующий значение u при условии $z = 0$ (см. рис. 3.2.2); a — (угловой) *коэффициент регрессии*, характеризующий скорость изменения переменной u в зависимости от изменения аргумента z.

Коэффициент регрессии численно равен тангенсу угла наклона α линии регрессии относительно оси аргумента:

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta z}, \tag{3.2.2}$$

где $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ — изменение зависимой переменной u соответствующее $\Delta z = z_{i+1} - z_i$ — изменению аргумента z; $a \geqslant 0$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$ и $a < 0$ при $\alpha > 90°$, как показано на рис. 3.2.2.

Нелинейные регрессии могут быть любой криволинейной формы: монотонные — возрастающие или убывающие, периодические — простые и сложные.

Монотонные нелинейные регрессии во многих случаях могут быть аналитически выражены некоторой комбинацией членов полинома (параболы) h-ей степени:

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{h-1} z^{h-1} + a_h z^h, \qquad (3.2.3)$$

где h принимает целочисленные значения от 0 до любого наперед заданного n; a_h — коэффициенты полинома — любые действительные числа.

Нетрудно видеть, что при $h = 0$; 1 и всех $a_{h>1} \equiv 0$, полином 1-й степени — это прямая линия ($u = a_0 + a_1 z$), которая, таким образом, является частным случаем нелинейной регрессии. При $h = 0$; 1; 2 и всех $a_{h>2} \equiv 0$ имеем обычную параболу ($u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$).

Расширяя область значений показателя степени h до всех действительных, отличных от нуля, чисел и используя замену переменных, можем из полинома (3.2.3) получить ряд других, важных для психологических приложений функций:

— *степенную* $u = a_h z^h$ при $h > 0$;

— *гиперболу* $u = a_h z^{-h} = \frac{a_h}{z^h}$ или $u = a_0 + a_h \cdot z^{-h}$;

— *показательную* $u = a_h h^z$, где h — константа; и, в частности, *экспотенциальную*:

$$u = a_h e^{bz},$$

где $h \equiv e$ — основание натуральных логарифмов, константа b — действительное число;

— *логарифмическую* $u = a_h \log \theta + a_0$, где $z \equiv \log \theta$ — логарифм (по любому основанию) нового аргумента θ (в частном случае $a_0 = 0$).

Простые периодические функции — это обычно $\sin z$, $\cos z$, а также $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$, которые находят свое применение при анализе амплитудно-частотных характеристик и при изучении моторной активности человека в разных отраслях психологии и физиологии труда и спорта.

Чаще, однако, встречаются *сложные периодические* функции, которые представляют собой комбинации (суммы и/или произведения) периодических и монотонных функций. В качестве примера можно привести следующие функции.

«Затухающий синус» (по Ф. Кликсу) *:

$$D_L = K \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

* Ф. Кликс. Проблемы психофизики восприятия пространства. «Прогресс», М., 1965, стр. 136.

где D_L — зависящее от времени (t) положение феноменального пространственного направления; K и a — константы, зависящие от условий опыта; ω — круговая частота колебаний; φ_0 — фазовый сдвиг, обусловленный запаздыванием реакции анализаторных систем человеческого организма.

«Затухающий косинус», широко используемый при корреляционном анализе случайных психических и физиологических процессов,* а также процессов поведения человека-оператора при слежении,**

$$R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau,$$

где $R(\tau)$ — корреляционная функция (см. стр. 256), зависящая от τ; τ — интервал времени, в течение которого существует связь между значениями исследуемого процесса; β — круговая частота; A и α — масштабные параметры.

Комбинация косинуса и параболы, характеризующая дисперсию (u) эффективности восприятия некоторых заглавных букв человеком в зависимости от средней эффективности (z) т. е. регрессия дисперсии на среднее арифметическое: ***

$$u = a(z - 1{,}5) \cdot (26 - z)$$

при

$$a = 0{,}07 + 0{,}038 \cdot \cos(13{,}85z), \qquad 1{,}5 \leqslant z \leqslant 24.$$

3.2.3. Корреляция и ее свойства

Согласно условиям (3.1.10а и б), случайные величины X и Y независимы в стохастическом (вероятностном) смысле лишь тогда, когда все условные законы распределения тождественно равны безусловным. В противном случае величины X и Y считаются стохастически связанными. Таким образом, в общем случае стохастическая связь имеется тогда, когда каждому из значений одной случайной величины соответствует специфическое (условное) распределение вероятностей значений другой величины, и наоборот, каждому из значений этой другой величины соответствует специфическое (условное) распределение вероятностей значений первой случайной величины.

---

* Г. А. Сергеев, Л. П. Павлова, А. Ф. Романенко. Статистические методы исследования электроэнцефалограммы человека. «Наука», 1968.

** Г. А. Сергеев, Г. В. Суходольский, В. М. Водлозеров. Исследование статистических характеристик человека-оператора при нестационарных входных воздействиях. В сб.: Система «человек и автомат». «Наука», М., 1965.

*** Г. В. Суходольский. К проблеме надежности человека. В сб. Вопросы инженерной психологии в автоматизированных системах управления. Л., 1972.

Специфичность условных распределений по сравнению с «одноименными» безусловными распределениями может состоять:
— только в отличии условных средних от безусловных,
— только в отличии условных дисперсий от безусловных,
— в отличии коэффициентов асимметрии (или эксцесса) условных распределений от этих коэффициентов безусловного распределения,
— в сочетании перечисленных отличий.

Частным случаем стохастической связи является корреляция.

Корреляция состоит в том, что условные средние каждой случайной величины отличаются от «своих» безусловных средних, а по этой причине, как будет показано, и условные дисперсии отличаются от безусловных дисперсий. Из такого определения корреляции следует, что наличие корреляции не исчерпывает возможных видов стохастической связи (зависимости) между двумя случайными величинами, а отсутствие корреляции не означает еще отсутствия других проявлений зависимости. Лишь для двумерного нормального распределения стохастическая связь исчерпывается корреляцией.

Можно выделить четыре основных свойства корреляции: направленность, тесноту, форму и направление.

Направленность, как и в случае сопряженности, характеризует одностороннюю обусловленность изменения значений одной из случайных величин изменениями значений другой случайной величины. В общем случае возможна как односторонняя направленность: X обусловлено Y, но не наоборот, или Y обусловлено X, но не наоборот, так и двусторонняя (взаимная) направленность: X обусловливает Y, а Y обусловливает X. В частном случае двумерного нормального распределения корреляция всегда взаимна. Но при этом могут оказаться различными степени корреляции. В этой связи будем различать корреляцию x по y (x/y) корреляцию y по x (y/x).

Теснота (сила, высота и т. п.) корреляции — это степень обусловленности изменений X значениями Y или, наоборот, Y значениями X. Поскольку эта обусловленность проявляется в отличии условных средних от «своих» безусловных средних, то теснота корреляции (x/y) характеризуется степенью отличия условных средних $M[x/y_i]$ от $M[X]$, а теснота корреляции (y/x) характеризуется степенью отличия условных средних $M[y/x_i]$ от $M[Y]$.

Форма корреляции определяется линейностью или нелинейностью регрессий $M[y/x] = \psi(x)$ и $M[x/y] = \varphi(y)$. Соответственно принято различать линейную и нелинейную корреляцию. Линейной корреляция является тогда, когда обе регрессии линейны. Если хотя бы одна из регрессий нелинейна, то и корреляция является нелинейной. Иногда нелинейностями регрессий можно пренебречь. Тогда их приближенно заменяют прямыми линиями и корреляцию считают квазилинейной. Следует подчеркнуть,

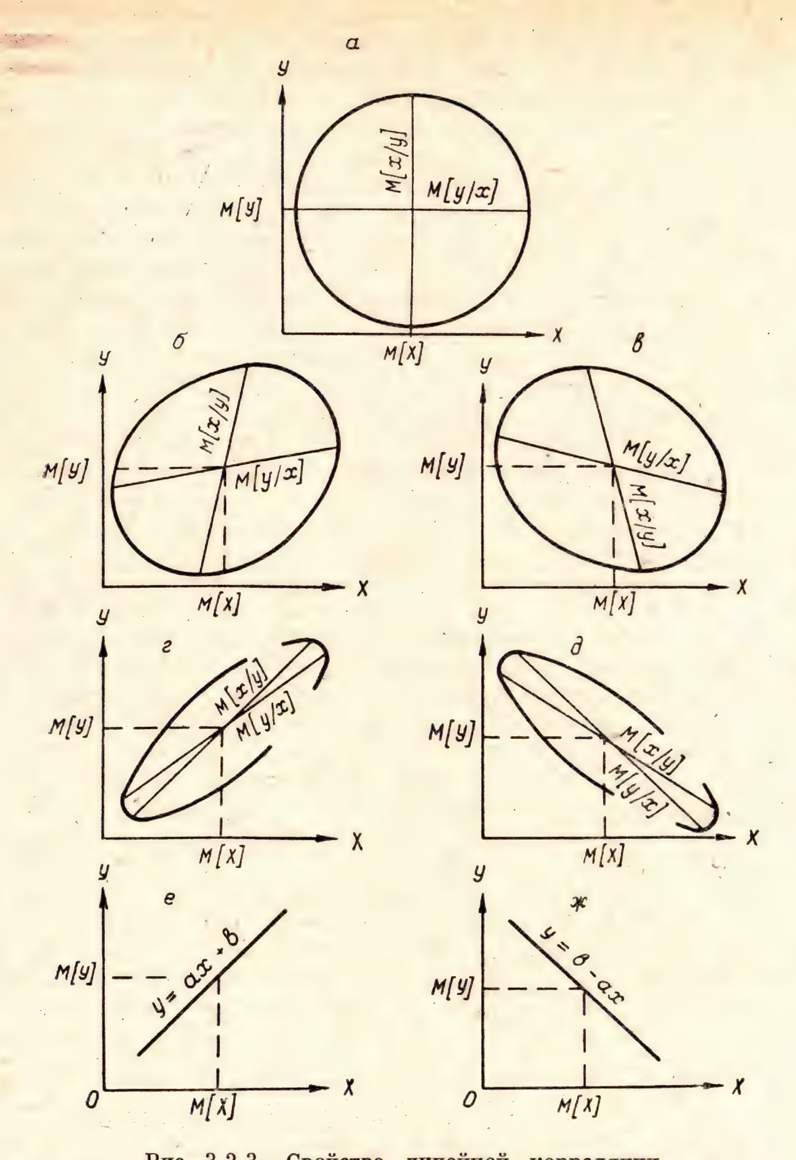


Рис. 3.2.3. Свойства линейной корреляции.

а — корреляция отсутствует. Слабая корреляция: б — положительная; в — отрицательная. Сильная корреляция: г — положительная; д — отрицательная. Полная корреляция (функциональная связь): е — положительная; ж — отрицательная. Везде: М [Y] и М [X] — безусловные средние; М [y/x] и М [x/y] — регрессии условных средних.

что в психологической практике чаще встречаются нелинейная и квазилинейная корреляции.

Направление корреляции выражается направлением регрессии. Если регрессия есть возрастающая функция своего аргумента ($a > 0$), то направление считают положительным (см. рис. 3.2.3, *б*, *в*, *г*). Если регрессия есть убывающая функция своего аргумента ($a < 0$), то направление считают отрицательным (см. рис. 3.2.3, *д*, *е*, *ж*).

3.2.4. Меры корреляции

Универсальной мерой тесноты связи является *коэффициент детерминации*, который представляет собой отношение дисперсии условных средних к безусловной дисперсии.

На рис. 3.2.1 можно видеть, что общий размах безусловного распределения каждой случайной величины есть сумма

$$d[Y] = d[\mathrm{M}(y/x_i)] + d_0[y/x_i]$$

и

$$d[X] = d[\mathrm{M}(x/y_j)] + d_0[x/y_j],$$

где $d[\mathrm{M}(y/x_i)]$ — размах, характеризующий рассеивание условных средних $\mathrm{M}(y/x_i)$; $d[\mathrm{M}(x/y_j)]$ — размах, характеризующий рассеивание условных средних $\mathrm{M}(x/y_j)$; $d_0[y/x_i]$ — часть общего размаха случайной величины Y, определяемая рассеиванием условных распределений y/x_i; $d_0[x/y_j]$ — часть общего размаха случайной величины X, определяемая рассеиванием условных распределений x/y_j.

Если вместо размаха воспользоваться более точной мерой рассеивания — дисперсией, то можно записать аналогичные равенства и для дисперсий:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}[Y] &= \mathrm{D}[\mathrm{M}(y/x_i)] + \mathrm{D}_0[y/x_i], \\ \mathrm{D}[X] &= \mathrm{D}[\mathrm{M}(x/y_j)] + \mathrm{D}_0[x/y_j], \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.4)$$

где $\mathrm{D}[Y]$ и $\mathrm{D}[X]$ — безусловные дисперсии; $\mathrm{D}[\mathrm{M}(y/x_i)]$ и $\mathrm{D}[\mathrm{M}(x/y_j)]$ — дисперсии условных средних относительно «своих» безусловных средних, $\mathrm{D}_0[y/x_i]$ и $\mathrm{D}_0[x/y_j]$ — средние из условных дисперсий. * Все эти дисперсии вычисляются различными способами, которые рассматриваются ниже. Здесь ограничимся «понятийными» формулами для дисперсий условных средних:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}[\mathrm{M}(y/x_i)] &= \sum_{i=1}^{n} \{\mathrm{M}(y/x_i) - \mathrm{M}[Y]\}^2 \cdot P_i, \\ \mathrm{D}[\mathrm{M}(x/y_j)] &= \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{M}(x/y_j) - \mathrm{M}[X]\}^2 \cdot P_j \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.5)$$

---

* При этом предполагается, что условные дисперсии $\mathrm{D}[y/x_i]$ не зависят от X, а условные дисперсии $\mathrm{D}[x/y_j]$ не зависят от Y.

и для средних из условных дисперсий:

$$\left.\begin{aligned} D_0[y/x_i] &= \sum_{i=1}^{n} D[y/x_i]\cdot P_i, \\ D_0[x/y_j] &= \sum_{j=1}^{n} D[x/y_j]\cdot p_j, \end{aligned}\right\} \quad (3.2.6)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ — номера условных распределений y/x_i; $j = 1, 2, \ldots, n$ — номера условных распределений x/y_j; P_i и P_j — безусловные вероятности для X и Y, остальные обозначения введены выше.

Из уравнений (3.2.4) после простых преобразований следуют формулы, определяющие в общем виде коэффициент детерминации величины Y величиной X:

$$\eta^2_{y/x} = \frac{D[M(y/x_i)]}{D[Y]} = 1 - \frac{D_0[y/x_i]}{D[Y]} \quad (3.2.7а)$$

и коэффициент детерминации величины X величиной Y:

$$\eta^2_{x/y} = \frac{D[M(x/y_j)]}{D[Y]} = 1 - \frac{D_0[x/y_j]}{D[Y]}. \quad (3.2.7б)$$

Таким образом, коэффициенты детерминации показывают относительную долю отличия условных средних от безусловных, причем мерой отличия являются дисперсии условных средних.

Анализируя уравнения (3.2.7а и б), можно видеть, что

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \eta^2_{y/x} \leqslant 1, \\ 0 \leqslant \eta^2_{x/y} \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \quad (3.2.8)$$

Следовательно, максимально тесная корреляция имеет место тогда, когда вся безусловная дисперсия исчерпывается дисперсией условных средних. Например,

$$D[M(y/x_i)] = D[Y],$$

как показано для линейного случая на рис. 3.2.3, *е* и *ж*. Здесь мы имеем дело с частным случаем стохастической связи — с функциональной зависимостью. Заметим, что при функциональной зависимости обе регрессии сливаются в одну и оба коэффициента детерминации оказываются равными единице.

Наоборот, корреляция отсутствует, если вся безусловная дисперсия исчерпывается средним из условных дисперсий, например,

$$D_0[y/x_i] = D[y],$$

как показано на рис. 3.2.3, *а*. Поскольку по смыслу отношения

$$\frac{D_0[y/x_i]}{D[Y]} \quad \text{и} \quad \frac{D_0[x/y_j]}{D[X]}$$

противоположны коэффициентам детерминации, их иногда используют как меры необусловленности изменений средних одной случайной величины изменениями другой и называют *коэффициентами акорреляции* (индетерминации). Коэффициент акорреляции, таким образом, показывает долю изменчивости, обусловленную посторонними факторами, которые находятся за пределами рассматриваемой двумерной системы X и Y.

Наряду с коэффициентами детерминации для измерения тесноты однонаправленной связи применяются *корреляционные отношения*:

$$\left.\begin{aligned} \eta_{y/x} &= \sqrt{\eta^2_{y/x}}, \\ \eta_{x/y} &= \sqrt{\eta^2_{x/y}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.9}$$

Распространенными мерами тесноты и направления линейной взаимной связи являются ковариация и коэффициент корреляции.

Ковариация (COV) — это среднее произведение центральных отклонений:

$$\mathrm{COV} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}[X]) \cdot (y_j - \mathrm{M}[Y]) \cdot P_{ij}, \tag{3.2.10}$$

где P_{ij} — вероятности (частости) совместного появления пар значений $x_i y_j$.

Важно понять и запомнить основные свойства ковариации как меры тесноты и направления корреляции.

1. Ковариация случайной величины самой с собой есть дисперсия:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{COV}[XX] &= \mathrm{D}[X], \\ \mathrm{COV}[YY] &= \mathrm{D}[Y]. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.11а}$$

2. Ковариация максимальна по абсолютной величине и равна дисперсии $\mathrm{D}[X] = \mathrm{D}[Y]$ при функциональной зависимости, когда прямая $y = ax + b$ располагается к оси абсцисс под углом 45 или 135° (см. рис. 3.2.3, *е* и *ж*).

3. Ковариация по абсолютной величине равна нулю при горизонтальном расположении линии регрессии y/x_i и вертикальном расположении линии регрессии x/y_j (рис. 3.2.3, *а*), а также стремится к нулю при нелинейной регрессии параболического вида (как на рис 3.2.1, *а*). Таким образом, модуль ковариации заключен в пределах:

$$0 \leqslant |\mathrm{COV}| \leqslant \mathrm{D}[X] = \mathrm{D}[Y]. \tag{3.2.11б}$$

4. Ковариация положительна при положительной и отрицательна при отрицательной корреляции. Знак ковариации определяется тем, что при положительной связи все центральные отклонения в формуле (3.2.10) положительны (см. рис. 3.2.3, *б*, *г*, *е*), а при отрицательной связи положительное центральное отклоне-

ние одной величины всегда умножается на отрицательное центральное отклонение другой величины (см. рис. 3.2.3, *в*, *д*, *ж*).

Коэффициент (линейной) *корреляции* (r) можно определить несколькими способами.

Во-первых, при строго линейной корреляции, теоретически связь полностью взаимна, в результате

$$\eta^2_{y/x} = \eta^2_{x/y} = r^2, \tag{3.2.12а}$$

откуда получается, что

$$r = \eta_{y/x} = \eta_{x/y}. \tag{3.2.12б}$$

Практически, однако, всегда имеются отличия эмпирических регрессий от линейных, и равенства (3.2.12а и б) не выполняются. Но коэффициент корреляции всегда меньше хотя бы одного из корреляционных отношений.

Во-вторых, можно определить коэффициент корреляции как ковариацию, нормированную произведением стандартных отклонений:

$$r = \frac{\mathrm{COV}}{\sigma[X]\cdot\sigma[Y]}. \tag{3.2.13}$$

При этом, учитывая свойства ковариации, запомним:

$$-1 \leqslant r \leqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant |r| \leqslant 1,$$

т. е. знак коэффициента корреляции характеризует направление связи, а модуль $|r|$ — ее тесноту.

В-третьих, можно определить коэффициент корреляции как среднее геометрическое из коэффициентов регрессии:

$$r = \sqrt{a_{y/x}\cdot a_{x/y}}, \tag{3.2.14}$$

где $a_{y/x}$— угловой коэффициент прямой регрессии y/x и $a_{x/y}$ — угловой коэффициент прямой регрессии x/y.

Из уравнений (3.2.13) и (3.2.14) нетрудно определить:

$$a_{y/x} = r\frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} = \frac{\mathrm{COV}}{D[X]} \tag{3.2.15а}$$

и

$$a_{x/y} = r\frac{\sigma[X]}{\sigma[Y]} = \frac{\mathrm{COV}}{\mathrm{D}[Y]}. \tag{3.2.15б}$$

В-четвертых, из этих равенств следует, что коэффициент корреляции — это *стандартизованный коэффициент регрессии*:

$$r = a_{y/x}\frac{\sigma[X]}{\sigma[Y]} = a_{x/y}\frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}. \tag{3.2.16}$$

На практике для вычисления r используются преимущественно последние три способа, а первый служит для проверки степени

отличия регрессий от линейных, а также для оценки доли взаимовлияния переменных по сравнению с долями их одностороннего влияния. В этой связи заметим, что взаимная линейная корреляция двух случайных величин может быть на самом деле обусловлена влиянием на эти величины некоторой другой неизвестной величины (или нескольких величин, см. главу 7).

§ 3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА

3.3.1. Аппроксимация простой регрессии

Одной из важнейших задач при обработке данных психологического эксперимента является аппроксимация регрессий. Аппроксимация регрессии означает приближенное аналитическое (формульное) выражение регрессии по ряду пар значений u_i и z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), полученных в эксперименте. Благодаря аналитическому выражению, во-первых, становится возможной интерполяция, т. е. определение значений исследуемой величины, не изучавшихся экспериментально, а во-вторых, и это главное, научные законы приобретают законченную математическую формулировку.

Можно выделить три этапа аппроксимации простой регрессии: выбор функции ξ, вычисление неизвестных коэффициентов, (стр. 186), проверка удовлетворительности аппроксимации опытных данных функцией ξ.

1. Выбор аппроксимирующей функции во многом определяется знаниями и навыками исследователя и представляет из себя своего рода искусство.

Могут быть два гипотетических основания для выбора функции ξ определенного вида. Первое — это априорные сведения о законе, которому подчиняется изучаемая величина (или аналогичные величины). Например, латентный период времени реакции для большинства разновидностей реакций подчиняется закону Пьерона (закону силы), что аналитически выражается гиперболой;* интенсивность ощущений следует либо закону Вебера — Фехнера (логарифмическая функция), либо закону Стивенса (степенная функция) **. Второе основание — это вид сглаженной (выравненной) от руки кривой на графике, где в координатах ZOU обозначены эмпирические значения u_i (см. рис. 3.2.2).

Гипотезу о том, что выбранная функция пригодна для аппроксимации целесообразно попытаться проверить, прежде чем пере-

---

* См. Б. Ф. Ломов. Человек и техника. «Советское радио», 1966, стр. 43; Е. И. Бойко. Время реакции человека. «Медицина», 1964; Р. Шошоль. Время реакции. В сб. Экспериментальная психология. Под ред. П. Фресса и Ж. Пиаже. «Прогресс», 1966.

** А. Пьерон. Психофизика. Там же.

ходить к вычислению неизвестных коэффициентов. Простейший способ проверки — приведение функции к линейному виду. Если регрессия в действительности линейна, то экспериментальные точки на графике располагаются примерно по прямой линии (см. рис. 3.3.5). Если регрессия удовлетворяет логарифмическому закону, то в полулогарифмических координатах ($\log z$) OU экспериментальные точки снова образуют прямую: происходит замена переменной

$$u = a\theta + b,$$

где $\theta = \log z$.

Логарифмируя значения z_i и u_i и обозначая их на графике в координатах ($\log z$) O ($\log u$), преобразуют в прямую линию рассмотренные выше:

— степенную функцию

$$\log u = \log a_h + h \log z,$$

откуда, обозначая $\log u = t$, $\log a_h = c$ и $\log z = \theta$, получаем

$$t = c + h\theta;$$

— гиперболу

$$\log u = \log a_h - h \log z$$

(см. рис. 3.3.1);

— показательную функцию

$$\log u = \log a_h + z \log h;$$

— экспоненциальную функцию

$$\log u = \log a_h + z \log e.$$

Аналогичным путем проверяется пригодность и более сложных функций *. Но для парабол h-ей степени, включающих не менее двух слагаемых при $h \geqslant 2$, этот путь не подходит.

Чтобы определить степень h полинома (3.2.3), необходимую и достаточную для аппроксимации эмпирических данных, последовательно вычисляют для равноотстоящих значений независимой переменной (Z) конечные разности: Δu_{i+1} — первой степени, $\Delta^2 u_{i+2}$ — второй и так далее до $\Delta^h u_{i+h}$ — h-ей степени, как в общем виде показано в табл. 3.3.1. Как только $\Delta^h u_{i+h}$ для некоторого h при всех i становятся одинаковы,** эту степень и принимают для аппроксимации полиномом.

2. Вычисление неизвестных коэффициентов регрессии можно осуществить несколькими способами. В частном случае линейной

---

* К. А. Семендяев. Эмпирические формулы. ГТТИ, 1933.

** На практике $\Delta^h u_{i+h}$ не бывают одинаковыми. Будучи нанесены на график, они флуктуируют вокруг горизонтальной прямой тогда, когда h достаточна для аппроксимации, но, флуктуируя, возрастают или убывают, если h еще недостаточна для нее.

Таблица 3.3.1

К вычислению конечных разностей h-ей степени

Δz_{i+1}=const	u_i	Δu_{i+1}	$\Delta^2 u_{i+2}$	. . .	$\Delta^h u_{i+h}$
z_1	u_1	—	—	. . .	—
z_2	u_2	$\Delta u_2 = u_2 - u_1$	—	. . .	—
z_3	u_3	$\Delta u_3 = u_3 - u_2$	$\Delta^2 u_3 = \Delta u_3 - \Delta u_2$	. . .	—
z_4	u_4	$\Delta u_4 = u_4 - u_3$	$\Delta^2 u_4 = \Delta u_4 - \Delta u_3$	. . .	$\Delta^h u_{i+h} = \Delta^{h-1} u_{i+h-1} - \Delta^{h-1} u_{i+h-2}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
z_{i-2}	u_{i-2}	. . .	. . .	. . .	. . .
z_{i-1}	u_{i-1}	$\Delta u_{i-1} = u_{i-1} - u_{i-2}$	. . .	. . .	. . .
z_i	u_i	$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$	$\Delta^2 u_i = \Delta u_i - \Delta u_{i-1}$	. . .	. . .
z_{i+1}	u_{i+1}	$\Delta u_{i+1} = u_{i+1} - u_i$	$\Delta^2 u_{i+1} = \Delta u_{i+1} - \Delta u_i$	. . .	$\Delta^h u_{i+1} = \Delta^{h-1} u_{i+1} - \Delta^{h-1} u_i$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
z_{n-3}	u_{n-3}	. . .	. . .	. . .	. . .
z_{n-2}	u_{n-2}	$\Delta u_{n-2} = u_{n-2} - u_{n-3}$	. . .	. . .	. . .
z_{n-1}	u_{n-1}	$\Delta u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2}$	$\Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2}$	. . .	. . .
z_n	u_n	$\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$	$\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$	. . .	$\Delta^h u_n = \Delta^{h-1} u_n - \Delta^{h-1} u_{n-1}$

(либо приведенной к линейному виду) регрессии можно провести «на глаз» прямую линию через экспериментальные точки на графике так, чтобы расстояния до всех точек были по возможности малыми. Затем непосредственно с графика (рис. 3.2.2) определяют свободный член и значения Δz и Δu, причем пара координат $z_i u_i$ выбирается произвольно. Далее по формуле (3.2.2) вычисляют угловой коэффициент a. Этот способ можно назвать графоаналитическим. При некотором навыке он обеспечивает хорошую точность аппроксимации.

В общем случае используют способ (метод) наименьших квадратов, который основывается на том, что сумма квадратов отклонений от среднего арифметического значения меньше, чем от другой величины, сколь угодно мало отличающейся от среднего арифметического:

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i - u_i^*)^2 = \min, \qquad (3.3.1)$$

где u_i — i-тое условное среднее, полученное эмпирически; u_i^* — теоретическое значение условного среднего; $i = 1, 2, \ldots, n$ — количество условных средних, полученных в эксперименте.*

Чтобы вычислить $h+1$ неизвестных коэффициентов регрессии a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, h$, включая свободный член), необходимо составить систему из $h+1$ нормальных уравнений. Для этого существует мнемонический способ, который заключается в $h+1$-кратном повторении следующей процедуры.

Пусть в общем случае для аппроксимации выбран полином (3.2.3):

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{h-1} z^{h-1} + a_h z^h.$$

Каждый i-тый цикл ($i = 0, 1, 2, \ldots, h$) процедуры состоит из двух шагов.

Первый шаг. Исходное уравнение умножить на i-тую степень аргумента z^i:

$$uz^i = a_0 z^i + a_1 z z^i + a_2 z^2 z + \ldots + a_{h-1} z^{h-1} z^i + a_h z^h z^i,$$

В результате преобразований получаем

$$uz^i = a_0 z^i + a_1 z^{i+1} + a_2 z^{i+2} + \ldots + a_{h-1} z^{i+h-1} + a_h z^{i+h}. \qquad (3.3.2)$$

Второй шаг. Результат первого шага (3.3.2) почленно подвести под знаки сумм (так как такие уравнения можно записать для

---

* При малом количестве наблюдений условные средние нельзя вычислить. Тогда u_i — это сами наблюдаемые значения переменной U, а n — количество всех наблюдений.

каждого из n условных средних u_i), вынося неизвестные коэффициенты за знаки сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} uz^i = a_0 \sum_{i=1}^{n} z^i + a_1 \sum_{i=1}^{n} z^{i+1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} z^{i+2} + \ldots +$$

$$+ a_{h-1} \sum_{i=1}^{n} z^{i+h-1} + a_h \sum_{i=1}^{n} z^{i+h}. \qquad (3.3.3)$$

Например, при $h = 2$ и $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ имеем обычную параболу, уравнение которой

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2.$$

В результате трехкратного применения изложенной процедуры получаем систему из трех нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} u &= a_0 n^* + a_1 \sum_{i=1}^{n} z + a_2 \sum_{i=1}^{n} z^2, \\ \sum_{i=1}^{n} uz &= a_0 \sum_{i=1}^{n} z + a_1 \sum_{i=1}^{n} z^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} z_3, \\ \sum_{i=1}^{n} uz^2 &= a_0 \sum_{i=1}^{n} z^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} z^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} z^4. \end{aligned}\right\}$$

3. Проверка удовлетворительности аппроксимации опытных данных выбранным уравнением осуществляется путем вычисления коэффициента линейной корреляции между рядами эмпирических (u_i) и теоретических (u_i^*) значений регрессии:

$$r(u, u^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i u_i^* - n\mathrm{M}[u_i] \cdot \mathrm{M}[u_i^*]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\{\mathrm{M}[u_i]\}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i^*)^2 - n\{\mathrm{M}[u_i^*]\}^2}} \qquad (3.3.4)$$

Если величина коэффициента корреляции оказывается недостаточной (см. стр. 309), то следует выбрать другое аппроксимирующее уравнение.

Пример 3.3.1. В экспериментах по изучению слежения с преследованием, выполняемого человеком, измерялось латентное время реакции в зависимости от скорости движения цели.** Результаты приведены в табл. 3.3.2. (столбцы 1 и 2). Предположив, что величина скорости движения цели действует на реакцию испытуемого аналогично тому, как действуют величины стимулов дру-

---

* Так как при $i = 0$ $z^i = 1$, то $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

** Цель начинала движение мгновенно и двигалась равномерно с некоторой скоростью (Г. В. Суходольский. О характеристиках человека при слежении. Автореф. канд. дисс. Л., 1968).

гих модальностей, можно думать, что искомая зависимость аналогична закону Пьерона. Следовательно, аппроксимирующая функция должна быть гиперболой. Такое предположение верно, если логарифмы латентного времени реакции в зависимости от логарифмов скорости образуют на графике ряд точек, флуктуирующих около прямой линии. Действительно, на рис. 3.3.1 точки с координатами ($\lg z_i$, $\lg u_i$), по табл. 3.3.2, группируются около прямой линии. Таким образом, исходной аппроксимирующей функцией может быть гипербола.

Таблица 3.3.2

Данные к расчету регрессии в примере 3.3.1

1	2	3	4	5	6	7
z_i	u_i	$\lg z_i$	$\lg u_i$	$(\lg z_i)^2$	$\lg z_i \cdot \lg u_i$	u_i^*
0,1	1,05	—1,00	0,02	1,000	—0,020	1,27
0,2	1,08	—0,70	0,03	0,490	—0,021	0,89
0,4	0,57	—0,40	—0,24	0,160	0,096	0,63
0,6	0,56	—0,22	—0,25	0,048	0,055	0,52
0,8	0,52	—0,10	—0,28	0,010	0,028	0,45
2	0,22	0,30	—0,66	0,090	—0,198	0,28
4	0,24	0,60	—0,62	0,360	—0,372	0,20
6	0,26	0,78	—0,58	0,608	—0,452	0,16
8	0,15	0,90	—0,83	0,810	—0,747	0,14
10	0,16	1,00	—0,80	1,000	—0,800	0,13
15	0,08	1,18	—1,10	1,392	—1,298	0,10
20	0,10	1,30	—1,00	1,690	—1,300	0,09
25	0,07	1,40	—1,16	1,960	—1,624	0,08
30	0,03	1,48	—1,52	2,190	—2,250	0,073
35	0,08	1,54	—1,10	2,372	—1,694	0,068
40	0,08	1,60	—1,10	2,560	—1,760	0,063
45	0,05	1,65	—1,30	2,722	—2,145	0,060
50	0,12	1,70	—0,92	2,890	—1,564	0,056
100	0,06	2,00	—1 22	4,000	—2,440	0,040
200	0,03	2,30	—1,52	5,290	—3,496	0,020
$\sum_{i=1}^{20}$	5,51	17,31	—16,15	31,64	—22,00	5,32

Примечание. u_i — эмпирические, u_i^* — теоретические средние арифметические значения латентного времени реакции, *сек*, z_i — скорости движения цели, *мм/сек*.

Остается разобраться еще в одном вопросе. В формуле закона Пьерона:

$$\tau = \frac{a}{I^n} + \tau_0$$

имеется свободный член (τ_0), который выражает «несократимый» компонент латентного времени реакции. Это означает, что даже при «бесконечно большой» интенсивности (I) стимула $\tau = \tau_0 > 0$.

При классической методике измерения латентного времени реакции, когда отсутствует возможность предвидения и антиципации момента появления стимула, это в действительности так. Но в условиях периодичности предъявления стимула имеется возможность обучиться предвидению и антиципации момента появления стимула, в результате τ_0 может быть нулевым и даже отрицательным.* В нашем случае эта ситуация как раз и имела место. В частности, при бесконечно большой скорости движения цели ** латентное время реакции в среднем составляло 0,03 *сек.* Таким образом,

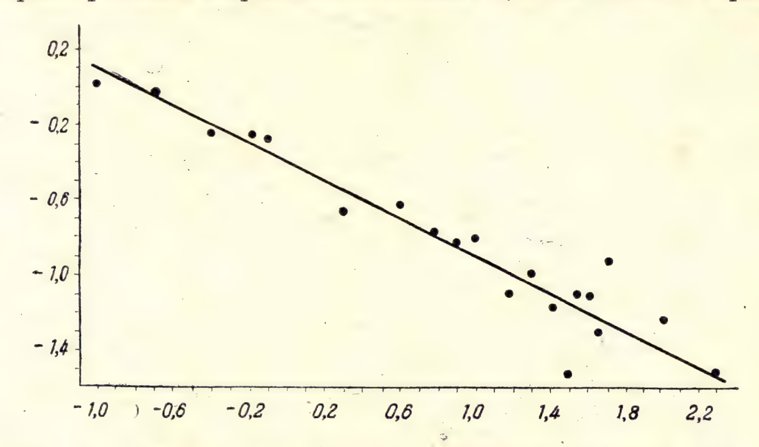


Рис. 3.3.1. Зависимость латентного времени реакции u_i, *сек*, от скорости движения цели z_i, *мм/сек*.

По оси абсцисс $\lg z_i$, по оси ординат $\lg u_i$, точками обозначены экспериментальные данные. Прямая линия соответствует аппроксимирующему уравнению: $\lg u_i = -0,4 - 0,5 \lg z_i$.

для наших экспериментальных условий аппроксимирующая гипербола должна быть без свободного члена:

$$u = \frac{a}{z^h},$$

где u — среднее арифметическое значение латентного времени реакции, *сек*; z — скорость движения, *мм/сек*; h и a — неизвестные коэффициенты, которые и следует вычислить по данным эксперимента.

Для вычисления коэффициентов используем метод наименьших квадратов. Логарифмируя исходную гиперболу, получаем уравнение прямой:

$$\lg u = \lg a - h \lg z.$$

---

* См. Е. И. Бойко. Время реакции человека. «Медицина», 1964, стр. 17.

** Это достигалось экспериментально одновременным исчезновением цели в одном месте и ее появлением в другом.

В соответствии с рассмотренной процедурой составляем систему из двух (по числу неизвестных коэффициентов) нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{20} \lg u_i &= 20 \lg a - h \sum_{i=1}^{20} \lg z_i, \\ \sum_{i=1}^{20} (\lg u_i \cdot \lg z_i) &= \lg a \sum_{i=1}^{20} \lg z_i - h \sum_{i=1}^{20} (\lg z_i)^2. \end{aligned}\right\}$$

Необходимые значения $\lg z_i$, $\lg u_i$, $(\lg u_i \cdot \lg z_i)$, $(\lg z_i)^2$, а также всех сумм, входящих в нормальные уравнения, представлены в табл. 3.3.2.

Записав систему уравнений в явном виде, решим ее способом исключения переменной (умножим первое уравнение на 17,31, второе — на —20 и сложим почленно):

$$\begin{array}{rl|l} -16{,}15 = 20 \lg a & -\ 17{,}31h & 17{,}31 \\ -22{,}00 = 17{,}31 \lg a & -\ 31{,}64h & -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} & -279{,}5565 = & 346{,}2 \lg a - 299{,}6361h \\ + & 440{,}0000 = & -346{,}2 \lg a + 632{,}8000h \\ \hline & 160{,}4435 = & +333{,}1639h; \end{array}$$

$$h \approx \frac{160{,}4435}{333{,}16} \approx 0{,}481,$$

$$20 \lg a = 17{,}31 \cdot 0{,}481 - 16{,}15 \approx -7{,}82,$$

$$\lg a = \frac{-7{,}82}{20} \approx -0{,}391.$$

Учитывая значительное рассеивание экспериментальных точек и по соображениям удобства, округлим: $h = 0{,}5$ и $\lg a = -0{,}4$. Тогда искомое уравнение регрессии в логарифмической форме имеет вид (рис. 3.3.1):

$$\lg u^* = -0{,}4 - 0{,}5 \lg z.$$

Потенцируя, окончательно получаем:

$$u^* = \frac{0{,}4}{\sqrt{z}} \quad \text{при } 0{,}1 \leqslant z \leqslant 200 \ (\textit{мм/сек}).$$

Для проверки удовлетворительности аппроксимации вычислим по формуле (3.3.4) коэффициент корреляции $r(u, u^*)$. Промежуточные величины представлены в столбцах 1 и 7 табл. 3.3.2 и в табл. 3.3.3,

$$r(u, u^*) = \frac{3{,}4199 - 20 \cdot \dfrac{5{,}51}{20} \cdot \dfrac{5{,}32}{20}}{\sqrt{3{,}4559 - 20 \cdot \dfrac{5{,}51^2}{20^2}} \cdot \sqrt{3{,}5025 - 20 \cdot \dfrac{5{,}32^2}{20^2}}} \approx$$

$$\approx \frac{1{,}9542}{\sqrt{1{,}9379 \cdot 2{,}0824}} \approx 0{,}97.$$

Таблица 3.3.3

Промежуточные величины для расчета коэффициента корреляции к примеру 3.3.1

i	u_i^2	$(u_i^*)^2$	$u_i \cdot u_i^*$
1	1,1025	1,6129	1,3335
2	1,1664	0.7921	0,9612
3	0,3249	0,3969	0,3591
4	0 3136	0,2704	0,2912
5	0,2704	0,2025	0,2340
6	0,0484	0,0784	0,0616
7	0,0576	0,0400	0,0480
8	0,0676	0,0256	0,0416
9	0,0225	0,0196	0,0210
10	0,0256	0,0169	0,0208
11	0,0064	0,0100	0,0080
12	0,0100	0,0081	0,0090
13	0,0049	0,0064	0,0056
14	0,0009	0,0054	0,0022
15	0,0064	0,0046	0,0054
16	0,0064	0,0040	0,0050
17	0,0025	0,0036	0,0030
18	0,0144	0,0031	0,0067
19	0,0036	0,0016	0,0024
20	0,0009	0,0004	0,0006
$\sum_{i=1}^{20}$	3,4559	3,5025	3,4199

Примечание. $\sum_{i=1}^{20} u_i = 5{,}51$ и $\sum_{i=1}^{20} u_i^* = 5{,}32$ приведены в табл. 3.3.2.

Итак, уравнение $u^* = 0{,}4 \cdot z^{-0{,}5}$ можно рассматривать в качестве реализации закона Пьерона для нашей экспериментальной ситуации.

Пример 3.3.2. При изучении эффективности вычислений, осуществляемых человеком вручную, было установлено, что затраты времени на вычисления определяются не спецификой арифметических действий, а количеством элементарных операций (суммирование, вычитание, умножение и деление в пределах одного десятичного разряда, а также переход из разряда в разряд). * В экспериментах с опытным вычислителем, который суммировал на счетах столбцы специально подобранных чисел, были получены оценки среднего времени суммирования, соответствующие переменному количеству элементарных операций (z_i) сложения и перехода

* См. Н. М. Кандарацкова, Г. В. Суходольский. Об эффективности и надежности элементарных вычислительных операций. В сб. Экспериментальная и прикладная психология, вып. 1, Изд. ЛГУ, Л., 1968.

Таблица 3.3.4

Исходные данные к примеру 3.3.2

		Количество элементарных операций (z_i)										
		8	13	27	42	69	71	96	121	129	152	183
u — время суммирования, *сек*	Результаты измерений	7 8 6 — — —	11 13 12 — — —	15 16 17 20 20 17	35 25 25 20 20 35	50 45 45 50 45 40	70 55 50 55 50 45	85 75 90 75 75 70	90 105 85 90 — —	90 105 105 110 105 105	150 150 125 150 115 —	210 180 190 150 160 210
	Сумма	21	36	105	160	275	325	470	370	620	690	1100
	$M[u/z_i]$	7	12	18	27	46	54	78	92	103	138	183

Примечание. Хронометраж выполнен с точностью до секунды, поэтому условные средние округлены до целых: $\text{ant}\{M[u/z_i]\}$.

из «младших» десятичных разрядов в «старшие». Результаты представлены в табл. 3.3.4. В нижней строке той же таблицы приведены условные средние значения времени суммирования ($M[u/z_i]$).

Чтобы выбрать аппроксимирующую функцию, нанесем значения ($M[u/z_i]$, z_i) на график и от руки проведем монотонную кривую, лежащую, по возможности, вблизи всех экспериментальных точек (рис. 3.3.2). Заметим, что при этом естественно считать: $u = 0$ при $z = 0$.

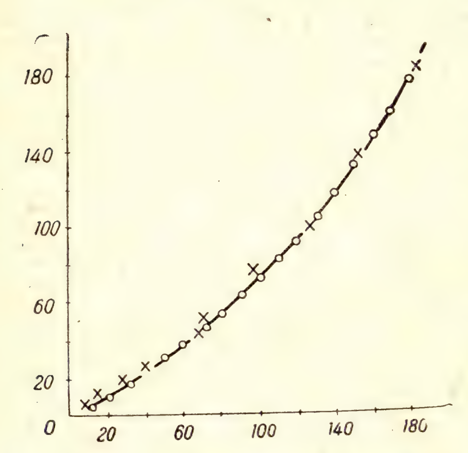


Рис. 3.3.2. Регрессия среднего времени суммирования, полученная сглаживанием «от руки».

По оси абсцисс — количество элементарных операций суммирования; по оси ординат — время, *сек*. Крестиками обозначены эмпирические данные, кружками — «выравненные» значения среднего времени.

По внешнему виду полученная кривая напоминает параболу h-ей степени. Проверяя это предположение, определим конечные разности h-его порядка (см. табл. 3.3.1). Непосредственно по эмпирическим данным этого сделать нельзя, так как разности значений аргумента (Δz_i) не одинаковы по величине. Поэтому выберем новые значения z_i и соответствующие им «выравненные» $u_в$, которые снимем непосредственно со сглаженной кривой (рис. 3.3.2, кружки). Эти

Таблица 3.3.5

Вычисление приращений h-его порядка для определения степени полинома, необходимой и достаточной для аппроксимации эмпирических значений среднего времени суммирования

Число элементарных операций z	Выравненные значения среднего времени суммирования $u_в$	$\Delta u_в$	$\Delta^2 u_в$
0	0	—	—
10	5	5	—
20	10	5	0
30	16	6	1
40	24	8	2
50	30	6	—2
60	38	8	2
70	46	8	0
80	55	9	1
90	64	9	0
100	73	9	0
110	83	10	1
120	92	9	—1
130	105	13	4
140	118	13	0
150	132	14	1
160	146	14	0
170	160	14	0
180	178	18	4

Примечание. Значения $u_в$ сняты непосредственно с графика на рис. 3.3.2.

значения, а также вычисленные по ним конечные разности представлены в табл. 3.3.5. Можно видеть, что разности второй степени группируются вокруг горизонтали. Таким образом, в качестве исходной аппроксимирующей функции подходит обычная парабола без свободного члена:

$$u_i = bz_i + az_i^2,$$

где u_i и z_i — определены экспериментально ($i = 1, 2, \ldots, 11$), а b и a — неизвестные коэффициенты, которые следует вычислить.

Система нормальных уравнений для вычисления a и b по методу наименьших квадратов получается применением рассмотренной процедуры:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{11} u_i &= b\sum_{i=1}^{11} z_i + a\sum_{i=1}^{11} z_i^2, \\ \sum_{i=1}^{11} z_i u_i &= b\sum_{i=1}^{11} z_i^2 + a\sum_{i=1}^{11} z_i^3. \end{aligned}\right\}$$

Таблица 3.3.6

Данные к расчету регрессии в примере 3.3.2.

i	z_i	u_i	$z_i u_i$	z_i^2	z_i^3	u_i^*
1	8	7	56	64	512	5
2	13	12	156	169	2 197	8
3	27	18	486	729	19 683	17
4	42	27	1 134	1 764	74 088	28
5	69	46	3 174	4 761	328 509	49
6	71	54	3 834	5 041	357 911	51
7	96	78	7 488	9 216	884 736	74
8	121	93	11 253	14 641	1 771 561	100
9	129	103	13 287	16 641	2 146 689	109
10	152	138	20 976	23 104	3 511 808	136
11	183	183	33 489	33 489	6 128 487	177
$\sum_{i=1}^{11}$	911	759	95 333	109619	15 226 181	—

Обозначения: z_i — количество элементарных операций; u_i — условное среднее арифметическое значение времени суммирования, соответствующее i-тому количеству элементарных операций; $u_i^* = \text{ant}\{u^*\}$, где $u^* = 0{,}563z + 0{,}0022z^2$ (см. в тексте).

Промежуточные величины и их суммы представлены в табл. 3.3.6. Подставляя их в уравнения, запишем систему в явном виде:

$$\left.\begin{aligned} 759 &= 911b + 109\,619a, \\ 95\,333 &= 109\,619b + 15\,226\,181 \cdot a. \end{aligned}\right\}$$

Решение проведем способом подстановки. Из первого уравнения находим

$$b = \frac{1}{911}(759 - 109\,619 \cdot a)$$

и подставляем во второе уравнение:

$$95\,333 = \frac{1}{911}\,109\,619\,(759 - 109\,619 \cdot a) + 15\,226\,181 \cdot a;$$

$$911 \cdot 95\,333 = 15\,226\,181 \cdot 911a + 109\,619 \cdot 759 - 109\,619^2 \cdot a;$$

$$86\,848\,363 = 13\,871\,050\,891 \cdot a + 82\,652\,726 - 12\,016\,325\,161 \cdot a;$$

$$a = \frac{4\,195\,637}{185\,472\,4730} \approx 0{,}0022;$$

$$b = \frac{1}{911} \cdot (759 - 109\,619 \cdot 0{,}0022) \approx 0{,}563.$$

Следовательно, искомая регрессия выражается уравнением параболы (рис. 3.3.3):

$$u^* = 0{,}563z + 0{,}0022z^2.$$

Так как измерения времени выполнены с точностью до 1 *сек*, то теоретические значения среднего времени на суммирование определим до целой части $u_i^* = \text{ant}\{u^*\}$, u_i^* приведены в табл. 3.3.6.

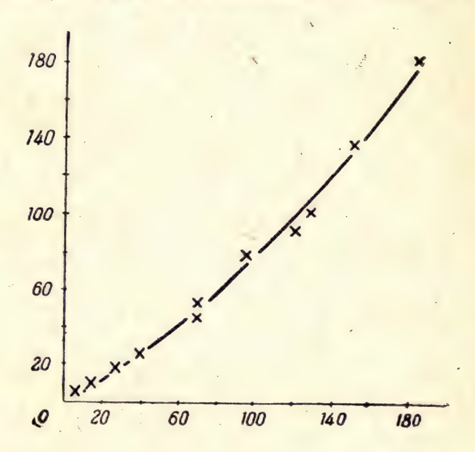


Рис. 3.3.3. Среднее время суммирования (u^*) в зависимости от количества «элементарных» операций (z).

$u^* = 0{,}563z + 0{,}0022z^2$. По оси ординат — время, *сек*; по оси абсцисс — z, шт. Крестики — эмпирические значения среднего времени суммирования (табл. 3.3.6).

Аппроксимация удовлетворительна, так как $r(u,\ u^*) \approx 0{,}99$. Следует отметить, что при $z = 1$ (имеется всего одна элементарная операция сложения) полученная регрессия дает средние затраты времени 0,56 *сек*. Это совпадает с результатами измерений в других опытах. *

3.3.2. **Определение числовых характеристик при небольшом количестве экспериментальных данных**

В психологической практике нередко количество пар значений $x_i\ y_i$ изучаемых случайных величин X и Y, наблюдавшихся в эксперименте, составляет несколько десятков. При таком небольшом количестве экспериментальных данных нельзя определить эмпирические функции распределений, но можно вычислить оценки всех числовых характеристик двумерной системы, что оказывается полезным для планирования фундаментальных исследований.

Можно выделить два случая. Первый — количество наблюдений $n < 30$, при этом можно вычислить только безусловные средние арифметические и дисперсии, а также коэффициент линейной корреляции и через него — коэффициенты регрессии. Здесь, однако,

---

* См. Н. М. Кандарацкова и Г. В. Суходольский. Ук. соч., табл. 1.

невозможно решить, линейна или нелинейна корреляция, а потому использование линейных корреляционных мер не обосновано и может дезинформировать исследователя, если величина r_{XY} окажется близкой к нулю.

Расчет перечисленных мер при $n < 30$ (а при необходимости — при любом n) осуществляется последовательно. Сначала вычисляются безусловные средние арифметические

$$M[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

и

$$M[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Далее вычисляются безусловные дисперсии и стандартные отклонения:

$$D[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (M[X])^2; \quad \sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

и

$$D[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (M[Y])^2; \quad \sigma[Y] = \sqrt{D[Y]}.$$

Ковариация здесь определяется по формуле

$$COV[XY] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - M[X]\,M[Y], \qquad (3.3.5)$$

после чего по формуле (3.2.13) рассчитывается коэффициент корреляции и по формулам (3.2.16) — коэффициенты линий регрессии.

Второй случай — количество наблюдений в пределах $30 \leqslant n < 200$.* Здесь уже можно осуществить простейшую группировку данных, что позволяет решить вопрос о форме корреляции и определить в явном виде регрессии и корреляционные отношения.

Группировка в этом случае состоит в том, что области наблюдения переменных X и Y квантуются на произвольной величины интервалы λ_X и λ_Y, число которых должно быть не меньше 4—5. Экспериментальные данные разносятся в таблицу (см. табл. 3.3.9), после чего подсчитываются частоты f_i — переменной X принять значение на i-том интервале λ_X $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и f_j — переменной Y принять значения на j-том интервале λ_Y $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Далее осуществляются вычисления:

---

* При $n \geqslant 200$ можно осуществлять обычную группировку и вычислять распределения (см. пункт 3.3.3).

— условных средних арифметических

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}(y/x_i) &= \frac{1}{f_i}\sum_{t=1}^{f_i} y_{t_j}, \\ \mathrm{M}(x/y_j) &= \frac{1}{f_j}\sum_{g=1}^{f_j} x_{gi}, \end{aligned}\right\} \quad (3.3.6)$$

где t — номера значений y_j, наблюдавшихся совместно со значениями x_i на i-том интервале λ_X, g — номера значений x_i, наблюдавшихся совместно со значениями y_j на j-том интервале λ_Y; f_i и f_j — определены выше;

— координат «привязки» для условных средних арифметических:

$$\left.\begin{aligned} E(x_i) &= \frac{1}{f_i}\sum_{t=1}^{f_i} x_{ti}, \\ E(y_j) &= \frac{1}{f_j}\sum_{g=1}^{f_j} y_{gj}, \end{aligned}\right\} \quad (3.3.7)$$

где $E(x_i)$ — среднее арифметическое значение величины X на i-том интервале λ_X, которому соответствует условное среднее $\mathrm{M}(y/x_i)$; $E(y_j)$ — то же для каждого условного среднего $M(x/y_j)$.

Полученные точки с координатами $\{E(x_i),\ \mathrm{M}(y/x_i)\}$ служат основой для определения регрессии «Y по X», а точки с координатами $\{\mathrm{M}(x/y_j),\ E(y_j)\}$ — для определения регрессии X по Y, которые далее подлежат аппроксимации. После определения $a_{y/x}$ и $a_{x/y}$ (в линейном случае) коэффициент корреляции вычисляется через них по формуле (3.2.14).

Вычисление безусловных средних арифметических можно теперь осуществить через условные средние:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}[Y] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}(y/x_i)\, f_i, \\ \mathrm{M}[X] &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{M}(x/y_j)\, f_j. \end{aligned}\right\} \quad (3.3.8)$$

Далее вычисляются все необходимые дисперсии:

— безусловные, как и в первом случае;

— дисперсии условных средних:

$$\left.\begin{aligned} D[M(y/x_i)] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\{M(y/x_i) - M[Y]\}^2 \cdot f_i, \\ D[M(x/y_j)] &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\{M(x/y_j) - M[X]\}^2 \cdot f_j; \end{aligned}\right\} \quad (3.3.9)$$

— остаточные дисперсии:

$$\left.\begin{aligned} D_0[y/x_i] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} D[y/x_i] \cdot f_i, \\ D_0[x/y_j] &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} D[x/y_j] \cdot f_j, \end{aligned}\right\} \quad (3.3.10)$$

где $n = \sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{j=1}^{k} f_j$; $D[y/x_i] = \frac{1}{f_i}\sum_{t=1}^{f_i} y_{tj}^2 - [M(y/x_i)]^2$ — условные дисперсии Y по X; $D[x/y_j] = \frac{1}{f_j}\sum_{g=1}^{f_j} x_{gi}^2 - [M(x/y_j)]^2$ — условные дисперсии X по Y.

В итоге по формулам (3.2.7) вычисляются корреляционные отношения, а по формуле (3.2.12) — коэффициент детерминации.

Пример 3.3.3. В плане комплексного исследования личности у студентов психологического факультета определялся социометрический статус на курсе (Y) и в своей учебной группе (X). Результаты представлены в табл. 3.3.7. Определим количественные характеристики двумя способами.

Для вычисления безусловных средних, дисперсий и ковариации по формуле (3.3.5) необходимы квадраты X^2 и Y^2, произведения XY, а также их суммы и суммы исходных данных. Эти величины приведены в табл. 3.3.8; по ним вычисляем:

$$M[Y] = \frac{1041}{42} \approx 25, \qquad M[X] = \frac{140{,}3}{42} \approx 3{,}34;$$

$$D[Y] = \frac{61\,155}{42} - 25^2 \approx 831, \qquad D[X] = \frac{4289{,}99}{42} - 3{,}34^2 \approx 91;$$

$$\sigma[Y] \approx 28{,}8, \qquad \sigma[X] \approx 9{,}54;$$

$$COV[XY] = \frac{10\,780{,}3}{42} - 25 \cdot 3{,}34 \approx 173{,}2;$$

$$r = \frac{173{,}2}{28{,}8 \cdot 9{,}54} \approx 0{,}63.$$

По формулам (3.2.15)

$$a_{y/x} = \frac{173{,}2}{91} \approx 1{,}9, \qquad a_{x/y} = \frac{173{,}2}{831} \approx 0{,}21.$$

Таблица 3.3.7

Исходные данные к примеру 3.3.3.

Y—социометрический статус на курсе, X—социометрический статус в своей группе, %

Y	X	Y	X	Y	X
48	1	45	9	8	4
—9	—9	23	8	73	19
100	22	64	15	23	2
—1	—11	11	4	23	6
14	—6	—18	—8	15	17
14	—0,5	14	—0,7	1	7
14	5	—11	—15	26	8
11	9	60	8	14	4
—28	0	34	8	81	7
46	2	11	—2	23	9
42	11	—47	—28	11	4
27	15	40	2	49	0,5
19	—8	31	15	26	8
83	0	20	—10	11	9

Таблица 3.3.8

К расчету коэффициента линейной корреляции по несгруппированным данным

У	X	$У^2$	X^2	УX	У	X	$У^2$	X^2	УX
48	1	2304	1	48	60	8	3600	64	480
—9	—9	81	81	81	34	8	1156	64	272
100	22	10 000	484	2200	11	—2	121	4	—22
—1	—11	1	121	11	—47	—28	2209	784	1316
14	—6	196	36	— 84	40	2	1600	4	80
14	—0,5	196	0,25	— 7	31	15	961	225	465
14	5	196	25	70	20	—10	400	100	—200
11	9	121	81	99	8	4	64	16	32
—28	0	784	0	0	73	19	5329	361	1387
46	2	2116	4	92	23	2	529	4	46
42	11	1764	121	462	23	6	529	36	132
27	15	729	225	405	15	17	225	289	255
19	—8	361	64	—152	1	7	1	49	7
83	0	6889	0	0	26	8	676	64	208
45	9	2025	81	405	24	4	196	16	56
23	8	529	64	184	81	7	6561	49	567
64	15	4096	225	960	23	9	529	81	207
11	4	121	16	44	11	4	121	16	44
—18	—8	324	64	144	49	0,5	2401	0,25	24,5
14	—0,7	196	0,49	—9,8	26	8	676	64	208
—11	—15	121	225	165	11	9	121	81	99
Суммы					1041	140,3	61 155	4289,99	10 780,3

Прежде чем группировать экспериментальные данные, построим на графике поле корреляции, а затем, как это сделано на рис. 3.3.4, расчленим его на интервалы, по возможности соблюдая два условия: 1) границы проходят между точками, 2) в каждом интервале оказываются два и более значений (иногда крайнюю точку можно оставить и одну). Значения границ интервалов снимаются прямо с графика и записываются, как показано в «шапке» табл. 3.3.9.

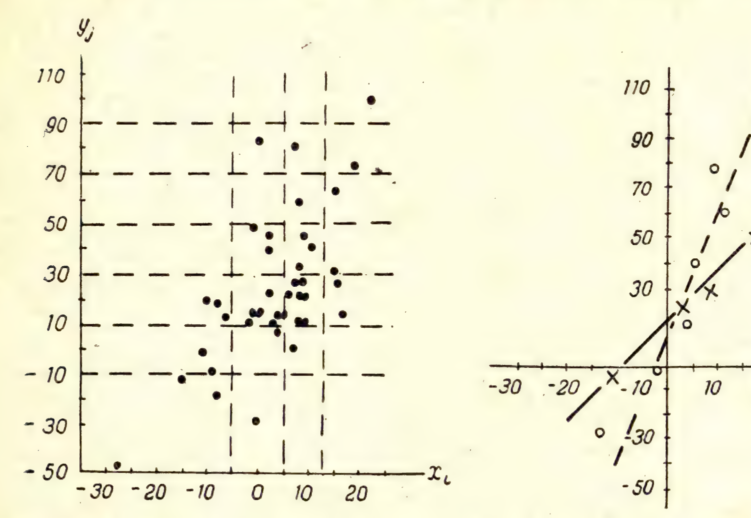


Рис. 3.3.4. Поле корреляции к примеру 3.3.3.

По оси абсцисс — значения социометрического статуса в своей группе (x_i), по оси ординат — значения социометрического статуса на курсе (y_j). Точками обозначено совместное появление пар значений $x_i y_j$; пунктиром выделены интервалы группировки данных в табл. 3.3.9.

Рис. 3.3.5. Линии регрессии к примеру 3.3.3.

По оси абсцисс — социометрический статус в группе (x_i), по оси ординат — на курсе (y_j). Крестиками обозначены условные средние М (y/x_i), кружками-условные средние М (x/y_j), сплошная линия — регрессия $y = 2x + 18$, пунктирная — регрессия $x = 0{,}2y - 2$.

Таким образом, поле корреляции в нашем примере оказывается расчленено на $m = 4$ интервала λ_X и на $k = 7$ интервалов λ_Y.

Группировку данных производят так. Из табл. 3.3.7 последовательно выбирают пары значений $y_j\ x_i$ и записывают в табл. 3.3.9 на пересечении соответствующих интервалов $\lambda_Y \lambda_X$: значение y_j в нижнем треугольнике, а значение x_i — в верхнем треугольнике. Окончив разноску, подсчитывают частоты f_i по столбцам и f_j — по строкам.

Получение условных средних и соответствующих им координат «привязки» осуществляется по столбцам и строкам табл. 3.3.9. Например, по первой строке и формулам (3.3.6) и (3.3.7) вычисляем:

$$\text{М}\,(x/y_1) = \frac{1}{4}\,[(-8) + (-15) + (-28) + (0)] = -13,$$

$$E\,(y_1) = \frac{1}{4}\,[(-18) + (-11) + (-47) + (-28)] = -26.$$

Нанесем значения условных средних на график с координатами $E(y_j)$ и $E(x_i)$ (рис. 3.3.5) и определим коэффициенты регрессий графоаналитическим способом.

По линейке проведем прямые на графике так, чтобы расстояния от экспериментальных точек были по возможности наименьшими. В частности, регрессия Y по X (сплошная линия на рис. 3.3.5) проводится через три крестика, а регрессия X по Y (пунктир на рис. 3.3.5) — через кружок с координатами (0, —2) и через середину расстояния между кружками с координатами (79,9) и (100, 22). Теперь по графику можно с приемлемой точностью определить коэффициенты регрессий: $b_Y = 18$ для регрессии Y по X, так как в этой точке сплошная линия на рис. 3.3.5 пересекает ось ординат;

$$a_{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{70-30}{26-6} = 2;$$

$b_X = -2$ для регрессии X по Y, так как в этой точке пунктирная линия на рис. 3.3.5 пересекает ось абсцисс;

$$a_{x/y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{12-4}{70-30} = 0{,}2.$$

Можно видеть, что значения угловых коэффициентов $a_{y/x}$ и $a_{x/y}$, полученные графоаналитическим способом, мало отличаются от вычисленных через ковариацию:

$$r = \sqrt{a_{y/x} a_{x/y}} = \sqrt{0{,}2 \cdot 2} \approx 0{,}63.$$

Необходимо отметить, что графоаналитический способ не следует применять для точных расчетов при значительном разбросе эмпирических условных средних и при нелинейностях.

Итак, аппроксимированные регрессии имеют вид

$$y^* = 2x + 18 \quad \text{и} \quad x^* = 0{,}2y - 2,$$

где y^* — теоретическое среднее значение статуса на курсе при условии, что статус в группе имеет значение x; x^* — теоретическое среднее значение статуса в учебной группе при значении статуса на курсе y.

Займемся вычислением коэффициентов детерминации. Для расчета $\eta^2_{y/x}$ и $\eta^2_{x/y}$ необходимы значения M [Y] и M [X], которые вычислим по формулам (3.3.8) и данным табл. 3.3.9:

$$\mathrm{M}[Y] = -\frac{1}{42}[(-4)\cdot 8 + 24\cdot 15 + 31\cdot 13 + 52\cdot 6] \approx 25,$$

$$\mathrm{M}[X] = \frac{1}{42}[(-13)\cdot 4 + (-2)\cdot 4 + 4\cdot 20 + 6\cdot 8 + 11{,}5\cdot 2 + $$
$$+ 9\cdot 3 + 22\cdot 1] \approx 3{,}3,$$

что совпадает с ранее вычисленными значениями. Безусловные дисперсии получены выше: D [Y] = 831 и D [X] = 91.

Таблица 3.3.9

Двумерная группировка и вычисление условных средних при небольшом числе наблюдений (40 ÷ 200)

y_j \ x_i	−28 ÷ −5	−5 ÷ 5,5	5,5 ÷ 13	13 ÷ 22	$E(y_j)$	$M(x/y_j)$	f_j
−47 ÷ −10	−8; −15; −18, −28 −11, −47	0 −28			−26	−13	4
−10 ÷ 10	−9; −11 −9, −1	4 8	7 1		0	−2	4
10 ÷ 30	−6, −8 14 −10 19; 20	−0,5; 5; 4; −0,7; −2 14 14 14 11 2; 4; 4 14; 11 11 23	9, 8, 6, 8, 9, 8 11 23 26 9 23 23 26 11	15, 17 27 15	17,5	4	20
30 ÷ 50		48 40 1; 2; 2; 0,5 46 49	42 11, 9, 8 45 34	15 31	42	6	8
50 ÷ 70			8 60	15 64	62	11,5	2
70 ÷ 90		0 83	7 81	19 73	79	9	3
100				22 100	100	22	1
$E(x_i)$	−12	2	8	17			
$M(y/x_i)$	−4	24	31	52			
f_i	8	15	13	8			

Используя формулы (3.3.9), рассчитаем дисперсии условных средних; промежуточные величины приведены в табл. 3.3.10 и 3.3.11.

$$D[M(y/x_i)] = \frac{11\,585}{42} \approx 275{,}83$$

и

$$D[M(x/y_j)] = \frac{1824{,}88}{42} \approx 43{,}45.$$

Затем по уравнениям (3.2.7а и б) вычислим и коэффициенты детерминации, и корреляционные отношения.

Таблица 3.3.10

Промежуточные величины к расчету $\eta^2_{y/x}$

f_i	ΔM	$\{\Delta M\}^2$	$\{\Delta M\}^2 f_i$
8	—29	841	6728
15	—1	1	15
13	6	36	468
6	27	729	4374
Сумма			11 585

Примечание. $\Delta M = M(y/x_i) - M[Y]$

Таблица 3.3.11

Промежуточные величины к расчету $\eta^2_{x/y}$

f_j	ΔM	$\{\Delta M\}^2$	$\{\Delta M\}^2 \cdot f_j$
4	—16,3	265,69	1062,76
4	—5,3	28,09	112,36
20	0,7	0,49	9,80
8	2,7	7,29	58,32
2	8,2	67,24	134,48
3	5,7	32,49	97,47
1	18,7	349,69	349,69
Сумма			1824,88

Примечание. $\Delta M = M(x/y_j) - M[X]$.

Коэффициент детерминации статуса на курсе статусом в своей группе составляет

$$\eta^2_{y/x} = \frac{275{,}83}{831} \approx 0{,}33,$$

откуда соответствующее корреляционное отношение $\eta_{Y/X} \approx 0{,}57$.

Коэффициент детерминации статуса в группе статусом на курсе составляет

$$\eta^2_{x/y} = \frac{43,45}{91} \approx 0,477,$$

откуда корреляционное отношение $\eta_{x/y} \approx 0,69$.

Осуществим проверку найденных значений, вычислив коэффициенты детерминации через остаточные дисперсии (формулы 3.3.10):

$$D_0[y/x_i] \approx 563,47, \quad \text{тогда } \eta^2_{y/x} = 1 - \frac{563,47}{831} \approx 0,32;$$

$$D_0[x/y_j] \approx 47, \quad \text{тогда } \eta^2_{x/y} = 1 - \frac{47}{91} \approx 0,48,$$

т. е. вычисления правильны.

Сопоставляя ранее вычисленное значение коэффициента корреляции ($r = 0,63$) с корреляционными отношениями, можем видеть, что в рассматриваемом случае

$$r = 0,5 \cdot (\eta_{y/x} + \eta_{x/y}).$$

Это свидетельствует о случайности различий между коэффициентами детерминации и о хорошем приближении корреляции к линейной.

В заключение, интерпретируя полученные результаты, подчеркнем различия между коэффициентом детерминации как мерой тесноты связи и коэффициентами регресии, характеризующими скорость изменения средних значений одной случайной величины при изменении другой. Так как односторонней обусловленностью из-за недостоверности различий $\eta^2_{y/x}$ и $\eta^2_{x/y}$ можно пренебречь, то можно считать, что между статусом студента на курсе и в группе существует взаимосвязь почти в половине случаев:

$$\eta^2_{y/x} = 0,33 \leqslant r^2 \leqslant \eta^2_{x/y} = 0,48.$$

Однако для этой доли случаев относительное (в единицах стандартного отклонения) изменение среднего статуса на курсе при изменении статуса в группе осуществляется в десять раз ($a_{y/x} : a_{x/y} \approx \approx 10$) интенсивнее, чем относительное изменение среднего статуса в группе при изменении статуса на курсе. Разумеется, эта предположительная интерпретация требует дополнительной экспериментальной проверки.

3.3.3. **Полный расчет количественных характеристик двумерной системы**

Чтобы полностью количественно охарактеризовать систему из двух случайных величин X и Y, необходимо иметь большое число экспериментальных данных: минимально $n \geqslant 200$ пар значений $x_i y_j$. Для вычисления законов распределения необходимо

осуществить двумерную группировку данных, которая в принципе выполняется по тем же правилам, что и одномерная группировка. Для каждой из величин определяют интервалы квантования (λ_X и λ_Y), причем нужно, чтобы количество интервалов (k) было одинаковым для X и Y; обычно $k = 8 \div 12$. Затем определяют отдельно для X и Y границы и средние значения интервалов, которые записывают в «шапку» группировочной таблицы (см. табл. 3.3.12). Желательно выбирать границы так, чтобы среди экспериментальных данных «граничные» значения отсутствовали.

Факт появления пары значений совместно на интервалах λ_X и λ_Y кодируют в пятиричной системе, как делалось прежде. Окончив кодирование, подсчитывают частоты совместного появления f_{ij}, затем количество сгруппированных наблюдений *

$$N = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f_{ij}, \quad i \text{ и } j = 1, 2, \ldots, k,$$

и частости совместного появления значений $x_i y_j$ на любой паре интервалов λ_X и λ_Y, где $f_{ij} > 0$

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{N}.$$

Далее определяют безусловные эмпирические вероятности распределения Y:

$$p_j = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}$$

и распределения X:

$$p_i = \sum_{j=1}^{k} p_{ij},$$

а после этого и условные эмпирические вероятности распределений x/y_j:

$$p_{i/j} = \frac{p_{ij}}{p_j}$$

и распределений y/x_i:

$$p_{j/i} = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Совокупности перечисленных вероятностей, сопоставленные соответствующим значениям переменных, образуют эмпирические законы распределения, полностью характеризующие двумерную систему **.

* В ходе кодирования несколько значений может быть потеряно или ошибочно приписано, поэтому $n \neq N$.

** В дальнейшем все эти законы должны аппроксимироваться теоретическими функциями распределения, что, в принципе, аналогично одномерному случаю, но выходит за рамки нашего изложения.

Для расчета числовых характеристик по распределениям используют упрощенные методы, основанные на линейном преобразовании исходных величин X и Y:

$$x_i'' = \frac{x_i - A_X}{\lambda_X} \quad \text{и} \quad y_j'' = \frac{y_j - A_Y}{\lambda_Y}, \qquad (3.3.11)$$

где A_X и A_Y — условные начала отсчета, выбранные вблизи предполагаемого центра рассеивания. С учетом преобразований (3.3.11), расчетные формулы можно представить следующим образом.

Для безусловных средних

$$\text{M}[X] = A_X + \lambda_X m_X'', \qquad (3.3.12а)$$

где величина m_X'' определяется тремя способами:

$$m_X'' = \sum_{i=1}^{k} x_i'' p_i = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} x_i'' p_{ij} = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i'' \frac{p_{ij}}{p_j}\right)\cdot p_j; \qquad (3.3.12б)$$

$$\text{M}[Y] = A_Y + \lambda_Y \cdot m_Y'', \qquad (3.3.13а)$$

где также

$$m_Y'' = \sum_{j=1}^{k} y_j'' \cdot p_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} y_j'' \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} y_j'' \frac{p_{ij}}{p_i}\right)\cdot p_i. \qquad (3.3.13б)$$

Для условных средних

$$\text{M}(x/y_j) = A_X + \lambda_X \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i'' \frac{p_{ij}}{p_j} \qquad (3.3.14а)$$

и

$$\text{M}(y/x_i) = A_Y + \lambda_Y \cdot \sum_{j=1}^{k} y_j'' \frac{p_{ij}}{p_i}. \qquad (3.3.14б)$$

Для безусловных дисперсий

$$\left.\begin{aligned} \text{D}[Y] &= \lambda_Y^2 \cdot \text{D}'[Y], \text{ где} \\ \text{D}'[Y] &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} (y_j'')^2 \cdot p_{ij} - (m_Y'')^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.15а)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \text{D}[X] &= \lambda_X^2 \cdot \text{D}'[X], \text{ где} \\ \text{D}'[X] &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} (x_i'')^2 \cdot p_{ij} - (m_X'')^2; \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.15б)$$

здесь m_X'' и m_Y'' определены выше. Для дисперсий условных средних

$$\left.\begin{aligned} \text{D}[\text{M}(x/y_j)] &= \lambda_X^2 \cdot \text{D}'[\text{M}(x/y_j)], \text{ где} \\ \text{D}'[\text{M}(x/y_j)] &= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i'' \frac{p_{ij}}{p_j}\right)^2 \cdot p_j - (m_X'')^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.16а)$$

и

$$\left.\begin{aligned} D\,[M\,(y/x_i)] &= \lambda_y^2 \cdot D'\,[M\,(y/x_i)], \text{ где} \\ D'\,[M\,(y/x_i)] &= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} y_j'' \frac{p_{ij}}{p_i}\right)^2 \cdot p_i - (m_Y'')^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.16б)$$

Для остаточных дисперсий

$$\left.\begin{aligned} D_0\,[x/y_j] &= \lambda_X^2 \cdot D'\,[x/y_j], \text{ где} \\ D_0'\,[x/y_j] &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} (x_i'')^2 \cdot p_{ij} - \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i'' \frac{p_{ij}}{p_j}\right)^2 \cdot p_j \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.17а)$$

и

$$\left.\begin{aligned} D_0\,[y/x_i] &= \lambda_Y^2 \cdot D'\,[y/x_i], \text{ где} \\ D_0'\,[y/x_i] &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} (y_j'')^2 \cdot p_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} y_j'' \frac{p_{ij}}{p_i}\right)^2 \cdot p_i \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.17б)$$

Сопоставляя уравнения (3.3.15)—(3.3.17), можно видеть что выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} D'\,[X] &= D'\,[M\,(x/y_j)] + D_0'\,[x/y_j], \\ D'\,[Y] &= D'\,[M\,(y/x_i)] + D_0'\,[y/x_i], \end{aligned}\right\}$$

поэтому коэффициенты детерминации равны:

$$\left.\begin{aligned} \eta^2_{x/y} &= \frac{D'\,[M\,(x/y_j)]}{D'\,[X]} = 1 - \frac{D_0'\,[x/y_j]}{D'\,[X]}, \\ \eta^2_{y/x} &= \frac{D'\,[M\,(y/x_i)]}{D'\,[Y]} = 1 - \frac{D_0'\,[y/x_i]}{D'\,[Y]}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.8)$$

Аналогично, в преобразованных величинах выражаются: коэффициент корреляции

$$r = \frac{COV'\,[XY]}{\sqrt{D'\,[X] \cdot D'\,[Y]}}, \qquad (3.3.9)$$

где

$$COV'\,[XY] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_i'' \cdot y_j'' \cdot p_{ij} - m_X'' \cdot m_Y'', \qquad (3.3.10)$$

и коэффициенты регрессии

$$\left.\begin{aligned} a_{y/x} &= \frac{\lambda_Y \cdot COV'\,[XY]}{\lambda_X \cdot D'\,[X]}, \\ a_{x/y} &= \frac{\lambda_x \cdot COV'\,[XY]}{\lambda_Y \cdot D'\,[Y]}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.11)$$

Таблица 3.3.12

Исходные данные к примеру 3.3.4

x_i — границы интервалов группировки амплитуд, *мм*; $\lambda_X = 15$; y_j — границы интервалов группировки полупериодов, *мм*; $\lambda_Y = 0{,}7$ *мм*, ≈ ≈ 0,023 *сек*; $N = 213$.

y_j \ x_i	7,5 22,5	22,5 37,5	37,5 52,5	52,5 67,5	67,5 82,5	82,5 97,5	97,5 112,5	112,5 127,5	127,5 142,5	142,5 157,5	157,5 172,5	172,5 187,5
2,95 3,65	1	1	1									
3,65 4,35	1	14	1	1								
4,35 5,05		5	17	7	4	2						
5,05 5,75			2	9	4	5	1					
5,75 6,45			1	8	7	5	3	3	1			
6,45 7,15				—	3	5	7	6	3	3		
7,15 7,85				1	2	3	2	—	4	4	3	
7,85 8,55					1	1	1	4	1	9	11	1
8,55 9,25								1	1	3	11	3
9,25 9,95									2	1	1	1
9,95 10,65										2	2	2
10,65 11,35										1	2	1

Пример 3.3.4. При изучении амплитудно-частотных характеристик руки человека в условиях направленного уменьшения и увеличения амплитуды совместно регистрировались значения полупериодов (Y) и амплитуд (X) колебаний руки. Результаты одного из испытуемых сгруппированы в табл. 3.3.12. Обработку экспериментальных данных начнем с вычисления частостей совместного распределения значений полупериодов (Y) и амплитуд (X), безусловных распределений, средних арифметических, дисперсий и коэффициента корреляции.

Частости p_{ij} совместного распределения, представленные в табл. 3.3.13, вычислены с округлением до одной тысячной так, чтобы выполнялось условие $\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{12} p_{ij} = 1$. Суммируя p_{ij} по строкам (по i), определим безусловные частости p_j, совокупность которых в сопоставлении совокупности интервалов группировки λ_Y образует ряд безусловного распределения значений полупериодов Y. Заметим, что $\sum_{j=1}^{12} p_j = 1$.

Суммируя частости p_{ij} по столбцам (по j) табл. 3.3.13, определим безусловные частости p_i, вместе с совокупностью интервалов группировки λ_X образующие ряд безусловного распределения значений амплитуд X; очевидно, что $\sum_{i=1}^{12} p_i = 1$.

Пользуясь методом, рассмотренным в § 3.1, можем определить частости кумулятивной призмограммы совместного распределения p_{ij} ($X \leqslant x_i$, $Y \leqslant y_j$), суммируя для любой пары значений $x_i y_j$ все частости p_{ij}, расположенные слева и сверху от искомой и на ее месте, например,

$$p_{ij}(X \leqslant 45,\ Y \leqslant 4) = 0{,}005 + 0{,}005 + 0{,}005 + 0{,}005 + 0{,}066 + 0{,}005 = 0{,}091.$$

Напомним, что «граничные» слева, снизу частости

$$p_{ij}(X \leqslant x_i,\ Y \leqslant y_j) \equiv p_i(X \leqslant x_i),$$

а «граничные» справа, сверху частости

$$p_{ij}(X \leqslant x_i,\ Y \leqslant y_j) \equiv p_j(Y \leqslant y_j),$$

как показано в табл. 3.3.14.

Безусловные средние арифметические значения определим, вычисляя m''_X и m''_Y по способу произведений через безусловные эмпирические вероятности (табл. 3.3.13):

$$m''_X = \sum_{i=1}^{12} x''_i \cdot p_i = 0{,}643,$$

$$m''_Y = \sum_{j=1}^{12} y''_j \cdot p_j = -0{,}243.$$

Таблица 3..3.13

Частоты (p_{ij}) совместного распределения полупериодов (y) и амплитуд (x) и промежуточные величины к расчету безусловных средних, дисперсий и коэффициента корреляции

	x_i	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180			
y_j	x''_i / y''_j	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	p_j	$y''_j p_j$	$\sum_{i=1}^{12} (x''_i)^2 p_{ij}$
3,3	−5	0,005	0,005	0,005										0,015	−0,075	0,250
4,0	−4	0,005	0,066	0,005	0,005									0,081	−0,324	1,246
4,7	−3		0,023	0,080	0,033	0,019	0,009							0,164	−0,492	1,239
5,4	−2			0,009	0,042	0,019	0,023	0,005						0,098	−0,196	0,273
6,1	−1			0,005	0,037	0,033	0,023	0,014	0,014	0,005				0,131	−0,131	0,341
6,8	0				—	0,014	0,023	0,033	0,028	0,014	0,014			0,126	0,000	0,509
7,5	1				0,005	0,009	0,014	0,009	—	0,019	0,019	0,014		0,089	0,089	0,863
8,2	2					0,005	0,005	0,005	0,019	0,005	0,042	0,051	0,005	0,137	0,274	2,258
8,9	3								0,005	0,005	0,014	0,051	0,014	0,089	0,267	2,068
9,6	4									0,009	0,005	0,005	0,005	0,024	0,096	0,466
10,3	5										0,009	0,009	0,009	0,027	0,135	0,693
11,0	6										0,005	0,009	0,005	0,019	0,114	0,485
p_i		0,010	0,094	0,104	0,122	0,099	0,097	0,066	0,066	0,057	0,108	0,139	0,038	1,000	−0,243	10,691
$x''_i p_i$		−0,050	−0,376	−0,312	−0,244	−0,099	0,000	0,066	0,132	0,171	0,432	0,695	0,228	0,643	$\lambda_X = 15$ *мм*	
$\sum_{j=1}^{12} (y''_j)^2 \cdot p_{ij}$		0,205	1,388	0,966	0,587	0,309	0,230	0,063	0,135	0,233	0,798	1,306	0,631	6,851	$\lambda_Y = 0,7$ *мм*	
$\sum_{j=1}^{12} x''_i \cdot y''_j \cdot p_{ij}$		0,225	1,432	0,924	0,470	0,109	0,000	−0,005	0,078	0,225	0,960	1,940	0,882	7,240	$A_X = 90$ *мм* $A_Y = 6,8$ *мм*	

Таблица 3.3.14

Частости $p_{ij}(X \leqslant x_i,\ Y \leqslant y_j)$ кумулятивной призмограммы совместного распределения и частости кумулятивных гистограмм безусловных распределений к примеру 3.3.4.

y_j \ x_i	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	$p_j(Y \leqslant y_j)$
3,3	0,005	0,010	0,015										0,015
4,0	0,010	0,081	0,091	0,096									0,096
4,7		0,104	0,194	0,232	0,251	0,260							0,260
5,4			0,203	0,283	0,321	0,353	0,358						0,358
6,1			0,208	0,325	0,396	0,451	0,470	0,484	0,489				0,489
6,8				0,325	0,410	0,488	0,540	0,582	0,601	0,615			0,615
7,5				0,330	0,424	0,516	0,577	0,619	0,657	0,690	0,704		0,704
8,2					0,429	0,526	0,592	0,653	0,696	0,771	0,836	0,841	0,841
8,9								0,658	0,706	0,795	0,911	0,930	0,930
9,6									0,715	0,809	0,930	0,954	0,954
10,3										0,818	0,948	0,981	0,981
11,0										0,823	0,962	1,000	1,000
$p_i(X \leqslant x_i)$	0,010	0,104	0,208	0,330	0,429	0,526	0,592	0,658	0,715	0,823	0,962	1,000	—

Проверка другим способом, по формулам (3.3.12б) и (3.3.13б) показывает, что вычисления правильны. Тогда по формулам (3.3.12а) и (3.3.13а):

$$\mathrm{M}[X] = 90 + 15 \cdot 0{,}643 \approx 99{,}6 \ (\textit{мм})$$

и

$$\mathrm{M}[Y] = 6{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}243 \approx 6{,}6 \ (\textit{мм}).$$

Безусловные дисперсии определим по формулам (3.3.15а и б), используя суммы квадратов отклонений, приведенные в последнем столбце и предпоследней строке табл. 3.3.13:

$$\mathrm{D}'[X] = 10{,}691 - 0{,}643^2 \approx 10{,}278,$$

$$\mathrm{D}[X] = 15^2 \cdot 10{,}278 \approx 2312{,}55,$$

откуда $\sigma[X] \approx 48{,}1$;

$$\mathrm{D}'[Y] = 6{,}851 - (-0{,}243)^2 \approx 6{,}792,$$

$$\mathrm{D}[Y] = 0{,}7^2 \cdot 6{,}792 \approx 3{,}33,$$

откуда $\sigma[Y] \approx 1{,}8$.

Для подсчета $\mathrm{COV}'[XY]$ в последней строке табл. 3.3.13 приведены суммы $\sum_{j=1}^{12} x_i'' \cdot y_j'' \cdot p_{ij}$, используя которые, по формуле (3.3.10) вычислим

$$\mathrm{COV}'[XY] = 7{,}24 - 0{,}643 \cdot (-0{,}243) \approx 7{,}396.$$

Тогда коэффициент корреляции определится по формуле (3.3.9)

$$r = \frac{7{,}396}{\sqrt{10{,}278 \cdot 6{,}792}} \approx 0{,}886,$$

и «линейная» оценка коэффициента детерминации: $r^2 \approx 0{,}785$.

По формулам (3.3.11) вычислим оценки коэффициентов линий регрессии:

$$a_{y/x} = \frac{0{,}7 \cdot 7{,}396}{15 \cdot 10{,}278} \approx 0{,}034,$$

$$a_{x/y} = \frac{15 \cdot 7{,}396}{0{,}7 \cdot 6{,}792} \approx 23{,}3.$$

Теперь займемся вычислением частостей условных распределений, условных средних, линий регрессии и корреляционных отношений. Условные законы распределения Y по X заданные частостями $\frac{p_{ij}}{p_i}$, представлены в табл. 3.3.15. Условные законы распределения X по Y, заданные частостями $\frac{p_{ij}}{p_j}$, представлены в табл. 3.3.16. В этих же таблицах приведены промежуточные величины, необходимые для расчета условных средних, дисперсий условных средних и остаточных дисперсий. По формулам (3.3.14а и б) и табл. 3.3.15 и 3.3.16 вычислены условные средние $\mathrm{M}(x/y_j)$

Таблица 3.3.15

Условные частости $\frac{p_{ij}}{p_i}$ значений y_j при условии, что появились значения x_i и промежуточные величины к расчету $\eta^2_{y/x}$

	x_i	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
y_j	y''_j \ x''_i	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
3,3	−5	0,500	0,053	0,048									
4,0	−4	0,500	0,702	0,048	0,041								
4,7	−3		0,244	0,769	0,270	0,192	0,093						
5,4	−2			0,087	0,344	0,192	0,237	0,076					
6,1	−1			0,048	0,303	0,333	0,237	0,212	0,212	0,088			
6,8	0				—	0,141	0,237	0,500	0,424	0,246	0,130		
7,5	1				0,041	0,091	0,144	0,136	—	0,333	0,176	0,101	
8,2	2					0,050	0,052	0,076	0,288	0,088	0,388	0,367	0,132
8,9	3								0,076	0,088	0,130	0,367	0,368
9,6	4									0,158	0,046	0,036	0,132
10,3	5										0,083	0,065	0,237
11,0	6										0,046	0,065	0,132
$\sum_{j=1}^{12} y''_j \frac{p_{ij}}{p_i} = S$		−4,500	−3,805	−2,961	−1,924	−1,102	−0 742	−0,076	0,592	1,317	2,217	2,795	3,873
S^2		20,250	14,478	8,768	3,702	1,214	0,551	0,006	0,350	1,734	4,915	7,812	15,000
p_i		0,010	0,094	0.104	0,122	0,099	0,097	0,066	0,066	0,057	0,108	0,139	0,038
$S^2 \cdot p_i$		0,202	1,361	0,912	0,452	0,120	0,053	0,000	0,023	0,099	0,531	1,086	0,570

Таблица 3.3.16

Условные частости $\frac{p_{ij}}{p_j}$ значений x_i при условии, что появились значения y_j, и промежуточные величины к расчету $\eta^2_{x/y}$

	y_j	3,3	4,0	4,7	5,4	6,1	6,8	7,5	8,2	8,9	9,6	10,3	11,0
x_i	x''_i y''_j	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6
15	—5	0,333	0,061										
30	—4	0,333	0,815	0,140									
45	—3	0,333	0,062	0,488	0,092	0,038							
60	—2		0,062	0,201	0,429	0,282		0,056					
75	—1			0,116	0,194	0,252	0,111	0,101	0,036				
90	0			0,055	0,234	0,176	0,183	0,157	0,036				
105	1				0,051	0,107	0,262	0,101	0,037				
120	2					0,106	0,222	—	0,139	0,056			
135	3					0,038	0,111	0,214	0,037	0,056	0,375		
150	4						0,111	0,214	0,306	0,157	0,208	0,333	0,263
165	5							0,157	0,372	0,573	0,208	0,333	0,474
180	6								0,037	0,157	0,208	0,333	0,263
$S=\sum_{i=1}^{12} x''_i \frac{p_{ij}}{p_j}$		—3,996	—3,875	—2,542	—1,277	—0,497	1,372	2,171	3,696	4,715	4,245	4,995	5,000
S^2		15,968	15,013	6,462	1,631	0,247	1,882	4,713	13,660	22,231	18,020	24,950	25,000
p_j		0,015	0 081	0,164	0,098	0,131	0,126	0,089	0,137	0,089	0,024	0,027	0,019
$S^2 \cdot p_j$		0 240	1,216	1,060	0,160	0,032	0,237	0,419	1,871	1,979	0,432	0,674	0,475

Таблица 3.3.17

Условные средние арифметические значения

Регрессия Y по X		Регрессия X по Y	
x_i	$M(y/x_i)$	y_j	$M(x/y_j)$
15	3,6	3,3	31
30	4,1	4,0	32
45	4,7	4,7	52
60	5,4	5,4	71
75	6,0	6,1	82
90	6,3	6,8	111
105	6,7	7,5	123
120	7,2	8,2	145
135	7,7	8,9	161
150	8,4	9,6	154
165	8,7	10,3	165
180	9,5	11,0	165

Примечание. Значения $M(y/x_i)$ округлены до десятых, а $M(x/y_j)$ — до целых в соответствии с точностью измерения полупериодов и амплитуд.

и $M(y/x_i)$, которые сопоставлены значениям y_j и x_i в табл. 3.3.17 и на рис. 3.3.6.

Определим коэффициенты линии регрессии Y по X графоаналитическим способом. При $X = 0$ с графика (рис. 3.3.6) получаем $b_Y \approx 3{,}1$. Далее:

$$a_{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9{,}5 - 3{,}1}{180} \approx 0{,}035.$$

Совпадение с $a_{y/x}$, вычисленным через ковариацию, хорошее. Можем принять уравнение $y = 0{,}035x + 3{,}1$ в качестве оценки теоретической зависимости средних полупериодов от амплитуды колебаний. Так как точки $M(x/y_j)$ на рис. 3.3.6 не образуют «хорошей» прямой линии, коэффициенты линий регрессии X по Y вычислим по методу наименьших квадратов. Нормальные уравнения в явном виде следующие:

$$\left.\begin{aligned} 1292 &= 85{,}8 \cdot a_{x/y} + 12 \cdot b_X, \\ 10650{,}4 &= 683{,}54 \cdot a_{x/y} + 85{,}8 \cdot b_X \end{aligned}\right\}.$$

Приближенные вычисления дают такое решение системы $a_{x/y} \approx$ ≈ 21; $b_X \approx -42$, которое удовлетворительным образом соответствует вычисленному через ковариацию значению $a_{x/y}$. Однако следует считать значение $a_{x/y} \approx 23{,}3$ более точным * и заново определить b_X:

$$b_X = \frac{1}{12} \cdot (1292 - 85{,}8 \cdot 23{,}3) \approx -59.$$

* Оно получено в результате более короткой цепочки вычислений.

Таким образом, в качестве линейной оценки теоретической зависимости амплитуды колебаний руки от полупериода принимается уравнение

$$x = 23{,}3y - 59.$$

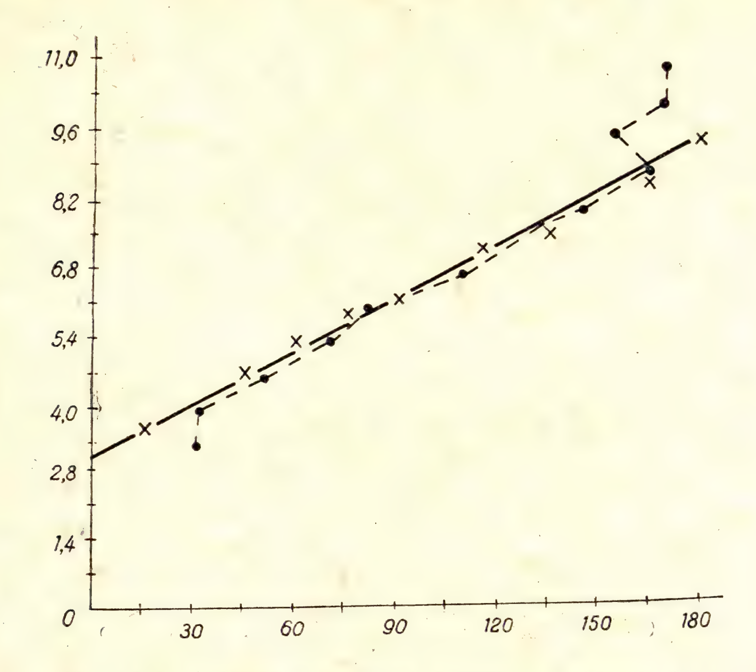


Рис. 3.3.6. Регрессии условных средних к примеру 3.3.4. По оси ординат — полупериоды (y); по оси абсцисс — амплитуды (x). Крестики — значения М (y/x_i), точки — значения М (x/y_j) по таблице 3.3.17. Графоаналитическим способом получена линия регрессии $y = 0{,}035x + 3{,}1$ (линия, соединяющая крестики).

Остается вычислить коэффициенты детерминации X по Y и Y по X и корреляционные отношения. Сначала по формулам (3.3.16 — 3.3.17) и промежуточным величинам из табл. 3.3.13, 3.3.16 и 3.3.17 рассчитаем необходимые дисперсии:

$$\mathrm{D}'\,[\mathrm{M}\,(x/y_j)] = 8{,}795 - 0{,}413 = 8{,}382,$$

$$\mathrm{D}_0'\,[x/y_j] = 10{,}691 - 8{,}795 = 1{,}896;$$

$$\mathrm{D}'\,[\mathrm{M}\,(y/x_i)] = 5{,}409 - 0{,}059 = 5{,}350,$$

$$\mathrm{D}_0'\,[y/x_i] = 6{,}851 - 5{,}409 = 1{,}442.$$

Проверяя равенства

$$D'[X] = D'[M(x/y_j)] + D_0'[x/y_j] = 10,278$$

и

$$D'[Y] = D'[M(y/x_i)] + D_0'[y/x_i] = 6,792,$$

убеждаемся в правильности вычислений. Окончательно находим

$$\eta^2_{x/y} = \frac{8,382}{10,278} = 1 - \frac{1,896}{10,278} \approx 0,816; \quad \eta_{x/y} = 0,903;$$

$$\eta^2_{y/x} = \frac{5,350}{6,792} = 1 - \frac{1,442}{6,792} \approx 0,788, \quad \eta_{y/x} = 0,888.$$

Сопоставляя с $r^2 = 0,785$, можно видеть, что корреляция в рассматриваемом случае почти не отличается от линейной.

Глава 4

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 4.1. МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

4.1.1. Понятие о многомерной системе

N случайных величин, рассматриваемых совместно, образуют N-мерную систему случайных величин. При $N > 2$ обычно говорят о *многомерных* системах.

Пусть случайные величины $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, \ldots, X_{N-1}, X_N$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ образуют систему. Тогда в каждом испытании совместно реализуются (или рассматриваются) N значений: $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{N-1}, x_N$, каждое из области определения

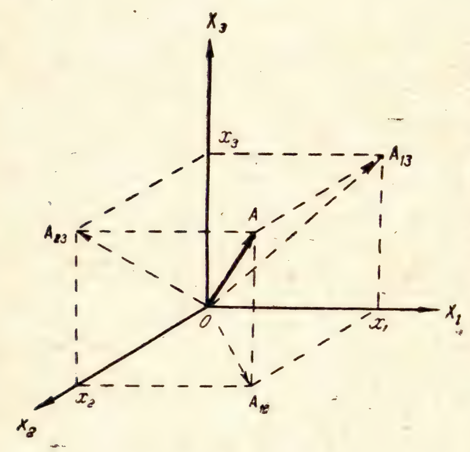


Рис. 4.1.1. Геометрическая интерпретация трехмерной системы.
Случайные величины X_1, X_2, X_3 изображены осями прямоугольной системы координат. A — реализация случайной точки. A_{12} — проекция A на плоскость X_1OX_2, аналогично A_{13} и A_{23} — проекции A на соответствующие плоскости X_1OX_3 и X_2OX_3. «Тройка» значений (x_1, x_2, x_3) однозначно определяет положение точки A в трехмерном пространстве. $\vec{OA}$ — реализация случайного вектора; $\vec{OA}_{12}$, $\vec{OA}_{13}$ и $\vec{OA}_{23}$ — проекции $\vec{OA}$ на соответствующие плоскости. Так как направление и величина вектора $\vec{OA}$ однозначно определены положением точки A, то ее координаты (x_1, x_2, x_3) суть и координаты вектора $\vec{OA}$.

соответствующей случайной величины X_i. Такую совокупность из N значений x_i можно рассматривать как координаты реализации *случайной точки* A в N-мерном декартовом пространстве. Если соединить точку A с началом координат, то совокупность значений x_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ может рассматриваться как совокупность координат проекций реализации *случайного вектора* $\vec{OA}$ на координатные оси.

Таким образом, N-мерная система случайных величин интерпретируется как случайная точка в гиперпространстве,* либо как случайный N-мерный вектор и задается списком своих реализаций **, каждая из которых определена совокупностью из N проекций $x_1, x_2, \ldots, x_N$ на координатные оси. Пример реализации случайной точки и случайного вектора в геометрической интерпретации для трехмерной системы дан на рис. 4.1.1. Заметим, что рассмотренные в предыдущей главе двумерные системы — простейший случай многомерных систем (при $N = 2$) — интерпретировались нами в виде случайной точки на плоскости («поле корреляции» на рис. 3.3.4) и задавались списком из n пар значений x, y.

4.1.2. Разновидности многомерных систем

Среди всевозможных многомерных систем для психологических приложений важно выделить: 1) системы однородные и разнородные; 2) неслучайные и случайные функции случайных величин.

Однородные (гомогенные) системы образованы однородными случайными величинами. В любой отрасли психологии, осуществляя совместный анализ наличия или степени выраженности какой-либо психической переменной X у группы из N индивидов, n-кратно измеряют у каждого индивида проявление этой переменной. Тогда, если обозначить психическую переменную i-того индивида как X_i, получаем N-мерную однородную систему, которая задана списком из $N \cdot n$ значений x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, N$ и $j = 1, 2, \ldots, n$):

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1i}, & \ldots, & x_{1N}, \\
x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2i}, & \ldots, & x_{2N}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{j1}, & x_{j2}, & \ldots, & x_{ji}, & \ldots, & x_{jN}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{ni}, & \ldots, & x_{nN}.
\end{array}
$$

Неоднородные (гетерогенные) системы образованы случайными величинами, природа которых различна. Они имеют место при совместном изучении разных психических явлений как у отдельных индивидов, так и у популяции. Например, совокупность гипотетических черт личности представляет собой в указанном смысле гетерогенную систему случайных величин.

* Гиперпространством называется N-мерное пространство при $N > 3$. Гиперпространство нельзя изобразить в наглядной геометрической форме. Поэтому многомерные системы изображаются в аналитической или табличной форме.

** Реализация случайной точки (случайного вектора) — это не случайная точка (вектор), полученные в результате опыта при некотором комплексе существенных условий (рис. 4.1.1).

Разделение многомерных систем на однородные и неоднородные важно по двум обстоятельствам. Во-первых, для однородных систем имеют очевидный физический смысл операции суммирования отдельных величин, входящих в систему, тогда как для неоднородных систем эти операции очевидного смысла не имеют.* В этой связи при создании и интерпретации многомерных психометрических шкал возникают известные трудности, преодолеваемые отчасти специальными приемами, вроде нормализации по составу, рассмотренной выше, с отображением всех разнородных переменных в некоторую однородную, так что в результате неоднородная система отображается в эквивалентную однородную систему.** Во-вторых, для однородных систем хорошо разработаны основы и приложения выборочного метода, тогда как для неоднородных систем выборочный метод развит недостаточно (см. главу 5).

Как и двумерные, — многомерные системы могут быть образованы независимыми и зависимыми случайными величинами. Если отдельные случайные величины в многомерной системе зависят друг от друга (попарно и/или в совокупности), то рассмотрению подлежат неслучайные и случайные функции.

Неслучайные функции от случайных величин (случайных аргументов) называются *множественными регрессиями* (корреляционными уравнениями). Парные регрессии, рассмотренные выше, — это частный случай множественных регрессий. Наиболее распространены суммы и произведения случайных величин, а также их комбинации. Независимо от вида, регрессии — это всегда детерминированные функции случайных аргументов, т. е. способ связи задан однозначно, поэтому их и называют неслучайными функциями от случайных величин.

Случайные функции (в отличие от неслучайных) — это случайные способы связи случайных (или неслучайных) переменных.*** Случайной называется функция, которая в конкретном испытании принимает значение из множества возможных функций, заранее не известно, какое.

Для пояснения здесь уместно провести аналогию с определениями случайного события и случайной величины. Случайное событие в опыте принимает значение из множества исходов (непересекающихся классов). Случайная величина принимает апостериори значение из множества числовых значений (из области определения). Случайная функция в результате опыта реализуется

---

* Нельзя непосредственно складывать мужской пол и уровень интеллектуального развития.

** Например, 11 разнородных психических переменных X_i в шкале Векслера (тип WAIS) отображаются в 11 однородных переменных Y_i, каждая из которых есть сумма баллов за выполнение i-того субтеста.

*** Отметим, что в теории случайных функций неслучайные функции случайных аргументов рассматривают как разновидность случайных функций. При этом, однако, имеют в виду второй смысл термина «функция» — зависимую переменную, которая всегда случайна, если случаен аргумент.

в виде неслучайной функции из некоторого класса функций, причем априорное множество непересекающихся классов функций можно рассматривать как область определения случайной функции.

Рассмотрим один из распространенных способов задания случайной функции в виде системы случайных величин. Пусть случайная функция $f(X)$ реализуется в n испытаниях, как показано на рис. 4.1.2, в виде n реализаций $f_j(X)$, где $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для каждого i-того значения аргумента $X_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ имеем случайную величину $f_j(X_i)$, заданную совокупностью значений случайной функции, соответствующих значению аргумента X_i.

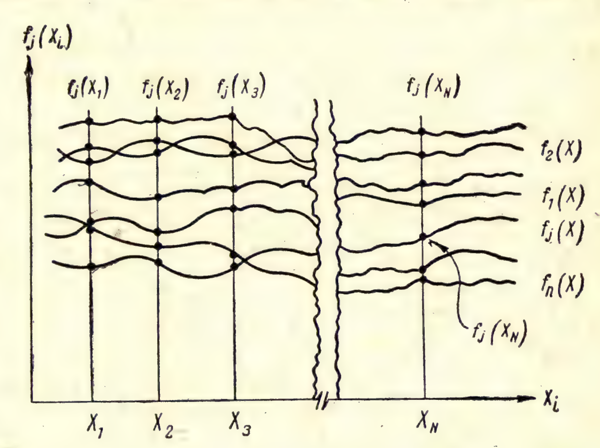


Рис. 4.1.2. Представление случайной функции в виде системы случайных величин. X_i — аргумент, заданный дискретными значениями ($i = 1, 2, \ldots, N$); $f_j(X_i)$ — значения случайной функции; $f_j(X)$ — реализации случайной функции; случайные величины образуются точками пересечения реализаций с перпендикуляром, восстановленным из X_i; $f_j(X_N)$ — значение N-й случайной величины.

Рассматривая совместно N значений аргумента, получаем систему из N случайных величин

$$f_j(X_1),\ f_j(X_2),\ \ldots,\ f_j(X_i),\ \ldots,\ f_j(X_N),$$

каждая из которых принимает свои значения $f_j(X_i)$ в j-том испытании. Можно видеть, что определенная таким путем случайная функция одного аргумента интерпретируется в виде однородной системы случайных величин. Неоднородная система должна рассматриваться как случайная функция N неоднородных аргументов. В общем виде изобразить такую функцию невозможно, так как ее реализации — это гиперповерхности, поэтому отметим лишь некоторые абстрактные представления такой функции.

Случайная функция произвольного, но конечного числа разнородных аргументов, очевидно, может рассматриваться как совокупность однородных систем случайных величин (по одной системе для каждого аргумента, как на рис. 4.1.2). Такая совокупность есть система случайных функций и, следовательно, метасистема случайных величин.

К понятию метасистемы можно прийти и от понятия неоднородной многомерной системы. Действительно, неоднородную

систему всегда можно представить как систему однородных систем. С другой стороны, любая совокупность неоднородных систем, рассматриваемых вместе, образует метасистему. Специалистам — психологам, педагогам, социологам, врачам и т. п. нетрудно понять, что совокупность психических свойств, состояний, а тем более функций, изучаемая на множестве индивидов, образует метасистему в рассмотренном смысле.

4.1.3. Законы распределения в многомерной системе

В многомерной системе, как и в двумерной, выделяются закон совместного распределения, безусловные и условные законы распределения.

Закон совместного распределения значений N случайных величин (многомерный, N-мерный закон распределения) является исчерпывающей количественной характеристикой N-мерной системы.

Функция (интегральная) N-мерного распределения численно равна вероятности совместного выполнения неравенств

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = P[(X_1 < x_1)(X_2 < x_2) \ldots (X_N < x_N)]. \quad (4.1.1)$$

Плотность N-мерного распределения (N-мерная плотность, плотность совместного распределения N случайных величин) численно равна

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{P_{jk \ldots m}}{\lambda_{1j}\lambda_{2k} \ldots \lambda_{Nm}}, \quad (4.1.2)$$

где λ_{1j} — j-тый интервал квантования случайной величины X_1, квантованной на $j = 1, 2, \ldots, n_1$ интервалов; λ_{2k} — k-тый интервал квантования величины X_2, квантованной на $k = 1, 2, \ldots, n_2$ интервалов, и т. д.; λ_{Nm} — m-ный интервал квантования величины X_N, квантованной на $m = 1, 2, \ldots, n_N$ интервалов; $P_{jk \ldots m}$ — вероятность совместного появления значений на пересечении N интервалов квантования $\lambda_{1j}, \lambda_{2k}, \ldots, \lambda_{Nm}$.

Для квантованных непрерывных случайных величин

$$P_{jk \ldots m} = P[(x_1 \leqslant X_1 < x_1 + \lambda_{1j})(x_2 \leqslant X_2 < x_2 + \lambda_{2k}) \ldots \ldots (x_N \leqslant X_N < x_N + \lambda_{Nm})], \quad (4.1.3)$$

для существенно дискретных величин

$$P_{jk \ldots m} = P[(X_1 = x_1)(X_2 = x_2) \ldots (X_N = x_N)] \quad (4.1.4)$$

и понятие плотности неприменимо.

Соотношение между вероятностями (4.1.3), (4.1.4) и интегральной функцией в принципе такое же, как и рассмотренное для двумерной системы:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{x_{1j}} \sum_{k=1}^{x_{2k}} \ldots \sum_{m=1}^{x_{Nm}} P_{jk \ldots m}, \quad (4.1.5)$$

где суммирование осуществляется для каждой i-той величины по всем интервалам квантования, включая заданный (j-тый, k-тый ... m-ный).

Так как общее число пересечений интервалов квантования

$$L=\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}\cdots\sum_{m=1}^{n_N}1=n_1n_2\ \ldots\ n_N=\prod_{i=1}^{N}n_i \qquad (4.1.6)$$

и образует полную группу несовместных исходов опыта, то, очевидно,

$$0\leqslant F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)\leqslant 1,$$

причем

$$\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}\cdots\sum_{m=1}^{n_N}P_{jk\ \ldots\ m}=1. \qquad (4.1.7)$$

Безусловные законы распределения характеризуют отдельные случайные величины, следовательно, безусловных законов в N-мерной системе ровно N, — столько же, сколько и случайных величин.

Для каждой переменной X_i интегральная или дифференциальная функции безусловного распределения получаются из соответствующих многомерных функций (4.1.1) и (4.1.2) суммированием (для квантованных и дискретных случайных величин) или интегрированием (для непрерывных) вероятностей по всем остальным переменным в области их наблюдения. Например, для квантованных переменных безусловные вероятности принять значения на интервалах λ_{1j}, λ_{2k}, ..., λ_{Nm} соответственно определяются так:

$$\left.\begin{aligned}
P_j&=P_j(X_1)=\sum_{k=1}^{n_2}\ \ldots\ \sum_{m=1}^{n_N}P_{jk\ \ldots\ m},\\
P_k&=P_k(X_2)=\sum_{j=1}^{n_1}\ \ldots\ \sum_{m=1}^{n_N}P_{jk\ \ldots\ m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_m&=P_m(X_N)=\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}\ \ldots\ P_{jk\ \ldots\ m}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.1.8)$$

N-мерную систему всегда можно разделить на части, выделив для особого рассмотрения любые K случайных величин (где $1\leqslant K\leqslant N-1$). Тогда K-мерный закон распределения, определенный при условии, что остальные $N-K$ случайных величин приняли фиксированные значения, является *условным K-мерным распределением.*

Интегральные и дифференциальные функции условных распределений получаются из соотношений, связывающих условные

и безусловные законы распределения с законом совместного распределения, например:

$$\left.\begin{aligned} F(x_2, \ldots, x_N/x_1) &= \frac{F(x_1 \ldots, x_N)}{F(x_1)}, \\ F(x_1/x_2, \ldots, x_N) &= \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{F(x_2, \ldots, x_N)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.1.9}$$

где $F(x_2, \ldots, x_N/x_1)$ — условная функция распределения величин $X_2, \ldots, X_N$ при фиксированном x_1; $F(x_1/x_2, \ldots, x_N)$ — условная функция распределения, величины X_1 при фиксированных $x_2, x_3, \ldots, x_N$; $F(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — N-мерная функция распределения; $F(x_2, \ldots, x_N)$ — N — 1-мерная функция распределения, $F(x_1)$ — функция безусловного распределения случайной величины X_1.

Напомним, что как и для двумерной системы, уравнения (4.1.9) основаны на правилах вычисления вероятностей произведения событий, зависимых и независимых. Очевидно, что формулы (4.1.9) соответствуют случаю, когда случайные величины в системе зависимы. Именно в этом случае условные законы распределения отличаются от «своих» безусловных.

В случае попарно и в совокупности независимых случайных величин все условные законы распределения тождественно равны безусловным законам, и справедливы равенства:

$$\left.\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= F(x_1) F(x_2) \ldots F(x_N), \\ f(x_1 x_2, \ldots, x_N) &= f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_N). \end{aligned}\right\} \tag{4.1.10}$$

Сравнивая формулы (4.1.10) и (4.1.9), можно видеть, насколько упрощает исследование многомерной системы независимость ее компонент. Часто при отсутствии априорных сведений или просто для упрощения выкладок априори делают допущение о независимости компонент. Следует подчеркнуть, что многомерные комплексы психических явлений обычно взаимосвязаны, если не целиком, то частично. Поэтому для доказательства взаимонезависимости или для выявления независимых и зависимых подсистем N-мерной системы требуются специальные исследования.

4.1.4. **Числовые характеристики в многомерной системе**

Числовыми характеристиками законов распределения в многомерной системе являются меры положения, рассеивания и связи.

В качестве мер положения используются средние арифметические значения, безусловные и условные. Безусловные средние $M_1, M_2, \ldots, M_N$ — можно рассматривать как координаты «центра тяжести» N-мерной системы. Условные средние локализуют в N-мерном пространстве «центры тяжести» K-мерных подсистем.

В качестве мер рассеивания используются безусловные и условные дисперсии, а также стандартные отклонения.

В качестве мер связи, наряду с уже рассмотренными мерами линейной и нелинейной парной корреляции, используются меры *парциальной* (частной, групповой) и *множественной* корреляции.

Из перечисленных мер новизну представляют лишь меры связи, которые мы здесь и рассмотрим. В N-мерной системе, как указывалось, можно рассматривать любую часть $K < N$ величин в связи с остальными $N - K$. Поэтому с точки зрения числа связанных между собой переменных выделяют связь *частную* (групповую, парциальную) и *множественную*. И та и другая могут, вообще говоря, быть линейными или нелинейными по форме, взаимными или односторонними по направленности.

Любая связь характеризуется мерами частной и множественной детерминации, но линейная взаимная связь — мерами частной и множественной корреляции. Принято говорить о степени (порядке) частной связи, которая в простейшем случае парной связи называется «нулевой». В качестве мер частной детерминации нулевого порядка используются уже рассмотренные $\eta^2_{i/j}$, а в качестве мер частной корреляции нулевого порядка — ковариации и коэффициенты линейной корреляции Пирсона r_{ij}, вычисленные для всех сочетаний по два из N переменных (парные).

Сравнительная простота вычислений обусловливает преимущественное использование в психологических исследованиях именно ковариаций и парных коэффициентов линейной корреляции, хотя это может быть по существу и не обосновано.* Совокупности парных ковариаций и коэффициентов корреляции объединяются в матрицы, которые и характеризуют частные взаимосвязи нулевого порядка в N-мерной системе.

Ковариационная (*корреляционная*) матрица порядка N образуется значениями ковариаций и безусловных дисперсий, как показано в табл. 4.1.1. Нетрудно видеть, что ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали, поэтому из общего числа $N\ (N - 1)$ ковариаций различных только $0{,}5\,N(N - 1)$.

Нормированная корреляционная матрица образуется путем нормирования ковариационной матрицы парными произведениями стандартных отклонений. В результате по главной диагонали располагаются единицы, а остальные элементы — коэффициенты линейной корреляции Пирсона (табл. 4.1.2):

$$r_{ij} = \frac{\mathrm{cov}_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}, \tag{4.1.11}$$

где COV_{ij} — ковариация i-той и j-той переменных, σ_i и σ_j — безусловные стандартные отклонения.**

---

* Отметим, что в частном случае N-мерного нормального распределения линейные меры исчерпывающе характеризуют взаимосвязи.

** Нормированная корреляционная матрица в психологических исследованиях часто именуется таблицей интеркорреляций. В дальнейшем изложении будем называть ее просто корреляционной.

Таблица 4.1.1

Ковариационная матрица N-мерной системы случайной величины

	x_1	x_2	...	x_i	...	x_N
X_1	D_1	COV_{12}	...	COV_{1i}	...	COV_{1N}
X_2	COV_{12}	D_2	...	COV_{2i}	...	COV_{2N}
...	...	...	...	...	...	...
X_i	COV_{1i}	COV_{2i}	...	D_i	...	COV_{iN}
...	...	...	...	...	...	...
X_N	COV_{1N}	COV_{2N}	...	COV_{iN}	...	D_N

Примечание. $COV_{ii} = D_i$. Так как $COV_{ji} = COV_{ij}$, то порядок индексации одинаков во всей матрице.

Корреляционная матрица в прикладных исследованиях обычно интерпретируется геометрически либо в виде графа (в корреляционном анализе), либо в виде конфигурации векторов (в факторном анализе, см. главу 7).

Таблица 4.1.2

Корреляционная матрица N-мерной системы

	x_1	x_2	...	x_i	...	x_N
X_1	1	r_{12}	...	r_{1i}	...	r_{1N}
X_2	r_{12}	1	...	r_{2i}	...	r_{2N}
...	...	...	...	...	...	...
X_i	r_{1i}	r_{2i}	...	1	...	r_{iN}
...	...	...	...	...	...	...
X_N	r_{1N}	r_{2N}	...	r_{iN}	...	1

Корреляционным графом назовем совокупность из N вершин, обозначающих переменные и соединенных попарно линиями (ребрами), обозначающими факт корреляции между парами переменных ij ($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, N$, но $i \neq j$). Так, для трех случайных величин корреляционный граф изображен на рис. 4.1.3. Сверху (или снизу) ребра надписывается значение r_{ij}. Разновидностью корреляционных графов являются *корреляционные плеяды*,* в которых длина ребер выбирается пропорцио-

* П. В. Терентьев. Метод корреляционных плеяд. Вестник ЛГУ, № 9, 1959.

нальной $\frac{1}{r_{ij}}$, положительная связь отображается сплошной, а отрицательная — пунктирной линией. Имеются и другие способы изображения r_{ij} на ребрах корреляционного графа.* Здесь необходимо еще раз отметить, что коэффициент корреляции r_{ij} отображает лишь факт совместной изменчивости i-той и j-той переменных. Это значит, что при $|r_{ij}| > 0$ либо сами переменные ij находятся в причинно-следственной взаимной связи, либо они причинно обусловлены некоторой другой переменной, входящей или не входящей в рассматриваемую систему.** Следовательно, ребра корреляционного графа можно лишь гипотетически трактовать в содержательном, а не формальном смысле.

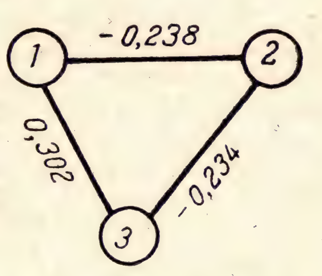


Рис. 4.1.3. Корреляционный граф к примеру 4.3.2.

Вершины обозначают: *1* — социометрический статус в группе; *2* — нейротизм; *3* — эмоциональную экспансивность. Ребра обозначают корреляционную взаимосвязь. Значения парных коэффициентов корреляции взяты из табл. 4.3.5.

Коэффициенты линейной частной корреляции первого порядка вычисляются через коэффициенты нулевого порядка и характеризуют взаимосвязь между парами переменных при условии, что третья переменная приняла фиксированное значение:

$$r_{ij.\,k}=\frac{r_{ij}-r_{ik}\cdot r_{jk}}{\sqrt{(1-r_{ik}^2)(1-r_{jk}^2)}}, \qquad (4.1.12)$$

где $r_{ij.\,k}$ — коэффициент частной корреляции первого порядка, характеризует линейную взаимосвязь i-той и j-той случайных величин, при элиминировании влияния k-той величины (индекс элиминируемой переменной отделяется точкой); r_{ij}, r_{ik}, r_{jk} — коэффициенты нулевого порядка; $i \neq j \neq k$ — номера переменных в системе, принимающие значения от 1 до N. Вообще коэффициенты частной корреляции h-его порядка вычисляются по

---

* Л. К. Выханду. Об исследовании многопризнаковых биологических систем. В сб. Применение математических методов в биологии, вып. 3. Л., 1964. Ю. Н. Нешатаев. Корреляционный анализ видового состава фитоценозов лесосплавной дубравы «Лес на Ворскле». В сб. Применение математических методов в биологии, вып. 4. Л., 1969.

** А. М. Мандрыка. Математические методы и их применение в психотехнике. М.—Л., 1931; Ф. М. Бородкин. Статистическая оценка связей экономических показателей. М., 1968; Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации. Под ред. Г. В. Осипова. М., 1968; Н. С. Четвериков. О ложной корреляции. В сб.: Применение методов корреляции в экономических исследованиях. М., 1969.

формулам, аналогичным (4.1.12), через коэффициенты частной корреляции h — 1-го порядка. Например,

$$r_{12.34\ldots N}=\frac{r_{12.34\ldots(N-1)}-r_{1N.34\ldots(N-1)}\cdot r_{2N.34\ldots(N-1)}}{\sqrt{(1-r^2_{1N.34\ldots(N-1)})\cdot(1-r^2_{2N.34\ldots(N-1)})}}. \quad (4.1.13)$$

Универсальной мерой тесноты множественной связи является *коэффициент множественной детерминации* случайной величины X_i остальными $N-1$ случайными величинами многомерной системы:

$$\eta^2_{i.23\ldots N}=\frac{D_ф}{D[X_i]}=1-\frac{D_0}{D[X_i]}, \quad (4.1.14)$$

где $D_ф$ — доля дисперсии $D[X_i]$, обусловленная изменениями условного среднего арифметического значения $M[X_i]$ под влиянием остальных $N-1$ переменных, D_o — доля дисперсии $D[X_i]$, обусловленная неучитываемыми в исследовании факторами.

Остаточную дисперсию вычислять проще, чем факторную. Остаточная дисперсия для линейной корреляции может быть выражена следующим образом:

$$D_o=D_{i.23\ldots N}=D_i\cdot(1-r^2_{i2})\cdot(1-r^2_{i3.2})\ \ldots\ (1-r^2_{iN.23\ldots(N-1)}), \quad (4.1.15)$$

где $D_{i.23\ldots N}$ — остаточная дисперсия i-той случайной переменной, рассматриваемой в зависимости от остальных $N-1$ величин; D_i — безусловная дисперсия i-той величины; r^2_{i2}, $r^2_{i3.2}$, ..., $r^2_{iN.23\ldots(N-1)}$ — квадраты коэффициентов частной корреляции возрастающего порядка.

Подставляя (4.1.15) в (4.1.14) и обозначая $R^2_{i.23\ldots N}$ — коэффициент линейной детерминации, получим

$$R^2_{i.23\ldots N}=1-(1-r^2_{i2})\cdot(1-r^2_{i3.2})\ \ldots\ (1-r^2_{iN.23\ldots(N-1)}). \quad (4.1.16)$$

Величина $R_{i.23\ldots N}=\sqrt{R^2_{i.23\ldots N}}$ называется коэффициентом множественной корреляции, который и характеризует степень линейной взаимосвязи i-той случайной величины с остальными $N-1$ величинами в системе. Величины $R_{i.23\ldots N}$ зависят от степени тесноты взаимосвязи, от количества переменных в системе и от степени близости анализируемых связей к линейным. В этой связи важно подчеркнуть, что, во-первых, всегда

$$R_{i.23\ldots N}\geqslant r_{ij}, \quad (4.1.17)$$

где r_{ij} — наибольший из парных коэффициентов корреляции, а, во-вторых, низкая величина $R_{i.23\ldots N}$ может свидетельствовать лишь об отсутствии линейной связи. Остаточную дисперсию и связанные с ней меры $\eta^2_{i.23\ldots N}$ и $R^2_{i.23\ldots N}$ можно определить и другими способами, которые будут рассмотрены ниже.

По аналогии с двумерной системой можно ввести понятие коэффициента множественной индетерминации

$$\overline{R}^2_{i.\,23\,\ldots\,N} = 1 - R^2_{i.\,23\,\ldots\,N}, \qquad (4.1.17а)$$

который служит мерой необусловленности i-той случайной переменной в системе остальными $N - 1$ переменными и, следовательно, может характеризовать изменчивость i-той переменной как обусловленную неконтролируемыми факторами (не включенными в систему). Очевидно, что мерой множественной акорреляции может служить коэффициент

$$\overline{R}_{i.\,23\,\ldots\,N} = \sqrt{1 - \overline{R}^2_{i.\,23\,\ldots\,N}}. \qquad (4.1.17б)$$

Меры множественной корреляции, рассматриваемые традиционно, в сущности не характеризуют N-мерную систему в целом. Фактически N-мерная система расчленяется на N таких подсистем, в каждой из которых i-тая случайная переменная рассматривается как зависящая от $N - 1$ остальных случайных аргументов (см. § 4.2). Такие подсистемы по отдельности и характеризуются мерами множественной связи. Таким образом, N-мерная система с точки зрения наличия в ней отдельных множественных связей характеризуется совокупностью в N мер. Однако возникает правомерный вопрос о том, нельзя ли иметь одну меру, характеризующую N-мерную систему в целом с точки зрения ее стохастической связности.

Согласно общему определению стохастической независимости и зависимости величин, образующих N-мерную систему (4.1.10) и (4.1.9), можно рассматривать стохастическую связность системы как степень отличия всех вероятностей $P_{jk\,\ldots\,m}$, фактически наблюдаемых, от вероятностей $P^*_{jk\,\ldots\,m}$, теоретически ожидаемых в предположении о независимости величин (4.1.10). Тогда в качестве меры стохастической связности системы можно использовать коэффициент сопряженности Чупрова (1.3.29), видоизменяя его следующим образом:

$$K_N = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}\cdots\sum_{m=1}^{n_N}\frac{(P_{jk\,\ldots\,m} - P^*_{jk\,\ldots\,m})^2}{P^*_{jk\,\ldots\,m}}}{\sqrt{L+2-t-g}}}, \qquad (4.1.18)$$

где K_N — коэффициент связности N-мерной системы (в числителе под радикалом записана величина отношения χ^2 к числу наблюдений: $\dfrac{\chi^2}{\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}\ldots\sum_{m=1}^{n_N}1}$, определенному после группировки данных); L — общее число пересечений интервалов квантования переменных $n_1, n_2, \ldots, n_N$, определенное выше формулой (4.1.6); t и g — соответственно число строк и столбцов в группировочной таблице (см. табл. 4.3.2), так что $t \cdot g = L$. Для конкретной системы,

заданной в табличной форме, t и g можно определить численно, и тогда формула (4.1.18) упрощается:

$$K_N = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{t}\sum_{k=1}^{g}\frac{(P_{jk\ldots m}-P^*_{jk\ldots m})^2}{P^*_{jk\ldots m}}}{\sqrt{(t-1)(g-1)}}}, \qquad (4.1.19)$$

где $r = 1, 2, \ldots, t$ — номера строк и $k = 1, 2, \ldots, g$ — номера столбцов группировочной таблицы, присваиваемые вне всякой связи со значениями уровней квантования переменных.

Величина K_N^2 может быть названа *коэффициентом совместной детерминации*, в отличие от коэффициентов множественной детерминации вида $\eta^2_{i.\,23\ldots N}$. Поскольку стохастическая связь не исчерпывается корреляцией, всегда справедливо:

$$K_N^2 \geqslant \eta^2_{i.\,23\ldots N}, \qquad (4.1.20)$$

где $\eta^2_{i.\,23\ldots N}$ — наибольший из всех коэффициентов множественной детерминации.

§ 4.2. НЕСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

В общем виде неслучайная функция от N случайных аргументов записывается так:

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_N), \qquad (4.2.1)$$

где φ — некоторая линейная или нелинейная функция, чаще всего это простая сумма

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (4.2.2а)$$

или (линейное) уравнение гиперплоскости

$$Y = \sum_{i=1}^{N} a_i X_i + a_0 \qquad (4.2.2б)$$

или (нелинейное) уравнение гиперповерхности, в которое, помимо (4.2.2б), аргументами входят произведения случайных величин по два, по три, по N, а иногда и степени отдельных величин. Однако, так как вторые и тем более высшие степени трудно истолковывать, а число произведений переменных быстро увеличивается при увеличении N, то стремятся использовать суммы (4.2.2а и 4.2.2б).

4.2.1. Числовые характеристики суммы и произведения случайных величин

Среднее арифметическое суммы случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$ равно сумме средних арифметических от слагаемых:

$$\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}\left[X_i\right], \tag{4.2.3}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$ — номера слагаемых.

Дисперсия суммы случайных величин равна сумме всех элементов ковариационной матрицы:

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{COV}_{ij}, \tag{4.2.4}$$

где COV_{ij} — парные ковариации, $i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, N$. Так как $\mathrm{COV}_{ii} = \mathrm{D}_i$ и для независимых случайных величин все $\mathrm{COV}_{ij} = 0$ для $j \neq i$, то в частном случае независимых слагаемых имеем

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{D}\left[X_i\right]. \tag{4.2.5}$$

Если величины $X_1, X_2, \ldots, X_N$, образующие метасистему, сами являются суммами некоторых величин, то суммирование дисперсий сводится к суммированию ковариационных матриц. При этом для независимых $X_1, X_2, \ldots, X_N$ ковариационная матрица суммы равна сумме ковариационных матриц слагаемых.

Для независимых случайных величин среднее арифметическое произведения N случайных величин равно произведению средних арифметических от слагаемых:

$$\mathrm{M}\left[\prod_{i=1}^{N} X_i\right] = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{M}\left[X_i\right], \tag{4.2.6}$$

в частном случае

$$\mathrm{M}\left[aX\right] = a\mathrm{M}\left[X\right], \tag{4.2.7}$$

где a — константа.

Для центрированных величин,* независимых в совокупности, дисперсия произведения равна произведению дисперсий сомножителей:

$$\mathrm{D}\left[\prod_{i=1}^{N} \overset{0}{X}_i\right] = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{D}\left[\overset{0}{X}_i\right], \tag{4.2.8}$$

---

* Случайная величина называется центрированной, если задана центральными отклонениями: x_i — M $[x_i]$.

где $\overset{0}{X}_i$ — центрированные величины. В частном случае

а также
$$\left.\begin{aligned} D[\lambda\overset{0}{X}] &= \lambda^2 \cdot D[\overset{0}{X}], \\ D[\lambda_X \cdot \overset{0}{X} \cdot \lambda_Y \cdot \overset{0}{Y}] &= \lambda_X \lambda_Y \cdot D[\overset{0}{X}\overset{0}{Y}], \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.9)$$

чем мы пользовались в предыдущей главе при вычислениях числовых характеристик двумерной системы.

4.2.2. **Законы распределения линейной функции от случайных аргументов**

Простая сумма вида (4.2.2а) распределений независимых случайных аргументов называется *композицией* (сверткой). Композиция легко определяется не для любых, а лишь для устойчивых законов распределения — закона Лапласа—Гаусса и гамма-распределения.*

Для нормального закона справедливо:
если

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \text{ и } f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{[x_i - M(x_i)]^2}{2\sigma_i^2}\right\},$$

то

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left[y - \sum_{i=1}^{N} M(x_i)\right]^2}{2\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2}\right\}. \qquad (4.2.10)$$

На композиции нормального закона основаны многие психометрические шкалы. В частности, в шкале Векслера для взрослых сумма шкальных оценок субтеста — это композиция нормализованных предварительных оценок, а сумма шкальных оценок за группу вербальных (или невербальных) тестов — это композиция нормально распределенных шкальных оценок субтестов.

Для гамма-распределения, аналогично, справедливо: если

$$T = \sum_{i=1}^{N} t_i \text{ и } f(t_i) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot t_i^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta t_i),$$

то

$$f(T) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot T^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta T), \qquad (4.2.11)$$

---

* Композиция гамма-распределенных случайных величин имеет тоже гамма-распределение.

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{D}(t_i)} \left[\sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}(t_i)\right]^2; \\ \beta &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{D}(t_i)} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}(t_i). \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.12)$$

Очевидно, что для экспоненциального распределения как частного случая гамма-распределения при $\alpha = 1$ мы можем записать:

$$f(T) = \beta \exp(-\beta T), \qquad (4.2.13)$$

где β определено уравнением (4.2.12). На композиции гамма-распределения основаны возможности оценивать распределение затрат времени на какие-либо рабочие или психические действия, расчленяемые на последовательно выполняемые простые операции.

Закон распределения линейной функции вида (4.2.2б) от нормально распределенных зависимых случайных аргументов имеет основное применение для многомерных психометрических шкал. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — случайные величины с плотностями

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[x_i - \mathrm{M}(x_i)]^2}{2\sigma_i^2}\right\},$$

и пусть

$$Y = \sum_{i=1}^{N} a_i X_i + a_0.$$

Тогда

$$f(y) = \frac{1}{\sigma[y]} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{\left[y - \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \mathrm{M}(x_i) + a_0\right)\right]^2}{2\mathrm{D}[Y]}\right\}, \qquad (4.2.14)$$

где

$$\mathrm{D}[Y] = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot a_j \cdot \mathrm{COV}_{ij};$$

$$i = 1, 2, \ldots, N; \quad j = 1, 2, \ldots, N;$$

COV_{ij} для всех i, включая $i = j$ — элементы ковариационной матрицы слагаемых; $\sigma[Y] = \sqrt{\mathrm{D}[Y]}$. По формуле (4.2.14) образуются, в частности, оценки спортивных достижений в международных первенствах. Частным случаем (4.2.14) является закон нормального распределения суммы вида

$$Y = a \sum_{i=1}^{N} X_i + b, \qquad (4.2.15)$$

плотность которой

$$f(y)=\frac{1}{\sigma[Y]}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[y-a\sum_{i=1}^{N}\mathrm{M}(x_i)+b\right]^2}{2\mathrm{D}[Y]}\right\},$$

где

$$\mathrm{D}[Y]=a^2\cdot\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{COV}_{ij}$$

для всех i и j, и

$$\sigma[Y]=\sqrt{\mathrm{D}[Y]}.$$

Такому распределению следуют оценки общего, вербального и невербального интеллекта в упомянутой шкале Векслера для взрослых. Например, общий коэффициент интеллектуального развития взрослых

$$\mathrm{I\,Q}_0=0{,}6\sum_{i=1}^{N}X_i+b,$$

где X_i — шкальная оценка за выполнение одного из N субтестов шкалы; b — свободный член, параболически зависящий от возраста человека.

Во многих практических случаях, лишь предполагая нормальную распределенность аргументов, пользуются не самим распределением линейной функции N аргументов, а его моментами — средними арифметическими, дисперсиями, ковариациями и коэффициентами корреляции, взаимосвязанными в так называемом корреляционном уравнении (регрессии).

4.2.3 Множественные линейные регрессии

Как и для двух случайных величин, в N-мерной системе функция, связывающая любые K случайных величин ($K = 2, 3, \ldots, N$), называется регрессией. Принято выделять простую, частную, чистую и множественную регрессии.

Простая (парная) регрессия связывает условные средние арифметические значения i-той случайной величины со значениями j-той случайной величины при всех наблюдавшихся значениях остальных $N - 2$ случайных величин в системе.

Частная регрессия связывает условные средние арифметические значения i-той случайной величины со значениями K (при $K = 2, 3, \ldots, N - 1$) других случайных величин при каких-то определенных (фиксированных) значениях остальных $N - K$ случайных величин.

Чистая регрессия — это разновидность частной регрессии для условий, когда остальные $N - K$ случайных аргументов фиксированы на среднем уровне.

Множественная регрессия связывает условные средние арифметические значения одной из случайных величин со значениями всех остальных $N - 1$ случайных величин.

Зная уравнение множественной регрессии, можно из него получить уравнение чистой регрессии. Именно эти разновидности чаще всего и используются в психологической практике.

По форме все перечисленные регрессии могут быть линейными или нелинейными. Из-за сравнительной простоты математического аппарата наибольший практический интерес для психолога представляют линейные регрессии.* В общем виде уравнение линейной множественной регрессии i-той переменной в развернутой форме записывается так:

$$x_{i.\,23\ldots N}=a_{0i.\,23\ldots N}+a_{i\,2.\,3\ldots N}x_2+$$
$$+a_{i\,3.\,2\ldots N}x_3+\ldots+a_{iN.\,23\ldots N-1}x_N, \qquad (4.2.17а)$$

где $x_{i.\,23\ldots N}$ — условное среднее значение случайной величины X_i, соответствующее значениям x_2, x_3, . . ., x_N, принимаемым остальными случайными величинами; $a_{i\,2.\,3\ldots N}$, $a_{i\,3.\,2\ldots N}$, $a_{i\,N.23\ldots N-1}$ — коэффициенты регрессии, смысл которых рассмотрим несколько ниже; $a_{0\,i.\,23\ldots N}$ — свободный член, показывающий, чему равен $x_{i.\,23\ldots N}$, если все аргументы равны нулю. В сокращенной форме уравнение (4.2.17а) будем записывать так:

$$x_i=\sum_{j=j_{\min}\neq i}^{N-1}a_{ij}x_j+a_{0i}, \qquad (4.2.17б)$$

где все обозначения те же, что и в (4.2.17а).

Коэффициент регрессии a_{ij} показывает парциальное (частное) влияние j-того случайного аргумента на i-тую случайную величину рассматриваемую в качестве зависимой переменной. При этом влияние остальных N — 2 случайных аргументов считается устраненным.** Например, коэффициент $a_{12\cdot34}$ показывает степень влияния случайной величины X_2 на случайную величину X_1 при устранении влияния X_3 и X_4.

Математический смысл коэффициента a_{ij} для множественной регрессии тот же, что и для парной (простой регрессии), — это угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона проекции условных средних $x_{i.\,23\ldots N}$ на плоскость X_iOX_j. Однако содержательная физическая интерпретация a_{ij} как «веса» или меры вхождения j-той переменной в i-тую в буквальном смысле допустима только для однородных систем. Например, если все X_j — это

---

* Это, конечно, не означает, что нелинейные регрессии не должны применяться. Во многих случаях, когда требуется выявить точный теоретический закон, именно нелинейные регрессии могут оказаться единственно подходящими для математической формулировки искомого закона. Но в начале исследования обычно достаточны линейные приближения. Кроме того, можно прийти к линейной регрессии, линеаризуя переменные.

** На самом деле это не так, и коэффициенты a_{12} и a_{13} в уравнении множественной регрессии $x_1=a_{01}+a_{12}x_2+a_{13}x_3$ не равны, хотя и близки по величине аналогичным коэффициентам в уравнениях парных регрессий $x_1=a_{01}+a_{12}x_2$ и $x_1=a_{01}+a_{13}x_3$.

баллы, набранные индивидом за выполнение $N - 1$ заданий, а X_i — это сумма баллов, характеризующая общую успешность его достижений, то a_{ij} могут выражать степень трудности или важности заданий, или оригинальности исполнения и т. п.

Иным является смысл коэффициента регрессии a_{ij}, если переменные i и j неоднородны. Здесь a_{ij} есть *мера направленного влияния* j-той на i-тую переменную, причем влияние понимается как стохастическая связь, в частном случае — как корреляция. При этом сами связанные величины могут быть количественными, количественными и качественными или только качественными — во всех случаях абсолютная величина $|a_{ij}|$ характеризует степень (силу) *одностороннего* влияния j-той на i-тую переменную, а знак (плюс или минус) — направление влияния (положительное или отрицательное, соответственно, как это было показано для двух случайных величин).

Рассмотрим геометрическую интерпретацию N-мерной системы в регрессионном аспекте.

Регрессионным подграфом i-той случайной величины (i-тым регрессионным подграфом) будем называть совокупность из N вершин, обозначающих случайные величины, из которых каждая j-тая соединена с i-той ($j \neq i$) стрелкой (дугой), обозначающей парциальное влияние j-той случайной величины на i-тую; кроме того, пусть в i-тую вершину «входит» дуга извне, что обозначает обусловленность i-той переменной внешними, не рассматриваемыми в данной системе факторами (все множество таких факторов можно трактовать как $N + 1$-ю вершину i-того регрессионного подграфа). Над или под дугами внутри системы (таких дуг $N - 1$) записываются значения коэффициентов i-той множественной регрессии.

Около дуг, входящих в вершины извне (их N, по числу вершин) надписываются коэффициенты множественной индетерминации $\overline{\mathrm{R}}^2_{i.\,23\,\ldots\,N}$, характеризующие влияние внешней среды на каждую i-тую переменную. Регрессионные подграфы для случая трех переменных представлены на рис. 4.2.1, *а*, *б*, *в*. В N-мерной системе, очевидно, имеется N i-тых регрессионных подграфов, каждый из которых можно рассматривать как некоторое событие A_i. Тогда систему в целом можно рассматривать как сумму совместных событий A_i.

Регрессионным графом системы будем называть граф, полученный объединением всех регрессионных подграфов (рис. 4.2.1, *г*). Регрессионному графу соответствует несимметричная квадратная матрица A, порядка N, внедиагональными элементами которой являются коэффициенты множественной регрессии a_{ij}, а диагональные элементы — это коэффициенты акорреляции $\overline{\mathrm{R}}_{i.\,23\,\ldots\,N}$ (см. табл. 4.3.6). По сравнению с корреляционным, регрессионный граф дает более обширную информацию об изучаемой системе, так как «расщепляет» взаимосвязи между переменными до направленных связей, характеризуемых различной силой влияния.

Как и для простой, для множественной регрессии угловые коэффициенты можно выразить в стандартной форме (в масштабе стандартных отклонений), нормируя соответствующие коэффициенты частной корреляции отношением стандартных отклонений. В общем виде имеем

$$a_{ij} = r_{ij.\,23\,\ldots\,N} \frac{\sigma_{i.\,23\,\ldots\,N}}{\sigma_{j.\,23\,\ldots\,N}}, \tag{4.2.18}$$

где $r_{ij.\,23\,\ldots\,N}$ — коэффициенты частной корреляции h-его порядка, определенные выше формулой (4.1.13); $\sigma_{i.\,23\,\ldots\,N}$ и $\sigma_{j.\,23\,\ldots\,N}$ — условные стандартные отклонения i-той и j-той случайных величин, соответственно; эти отклонения получаются из дисперсий, определяемых по формуле (4.1.15), извлечением корня квадратного.

Рис. 4.2.1. Представление множественных регрессий на графах.

а, *б* и *в* — регрессионные подграфы социометрического статуса (*1*), нейротизма (*2*) и эмоциональной экспансивности (*3*) соответственно; *г* — регрессионный граф системы этих переменных (получается «наложением» своих подграфов).

Коэффициенты множественной регрессии можно представить иным образом:

$$a_{ij} = \beta_{ij} \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \tag{4.2.19}$$

при

$$\beta_{ij} = r_{ij.\,23\,\ldots\,N} \frac{\sigma_j \cdot \sigma_{i.\,23\,\ldots\,N}}{\sigma_i \cdot \sigma_{j.\,23\,\ldots\,N}}, \tag{4.2.20}$$

где β_{ij} — стандартизованные коэффициенты регрессии (так называемые β-коэффициенты); σ_i и σ_j — безусловные стандартные отклонения i-той и j-той случайных величин. Замена коэффициентов линейной множественной регрессии β-коэффициентами, в сущности,

означает переход от самих величин X_j к их основным отклонениям:

$$\left.\begin{array}{c} x''_j = \dfrac{x_j - M(X_j)}{\sigma_j} \\ j = 1, 2, \ldots, N \end{array}\right\}, \tag{4.2.21}$$

в результате чего уравнение множественной регрессии вместо вида (4.2.17) приобретает вид

$$x''_{i.23\ldots N} = \sum_{j \neq i}^{N-1} \beta_{ij} x''_j, \tag{4.2.22}$$

где свободный член a_{0i} отсутствует.

Коэффициенты β_{ij} показывают, на какую долю своего стандартного отклонения σ_i изменится i-тая случайная переменная, если влияющая на нее j-тая переменная изменится на σ_j, а все остальные аргументы не изменятся. В качестве примера интерпретации множественной регрессии вида (4.2.22) приведем одно из так называемых уравнений «успешности», полученное Кэттелом * в результате исследований американских школьников (мальчиков и девочек в возрасте около 12 лет):

$$X_1 = 0{,}2X_2 + 0{,}5X_3 + 0{,}3X_4 - 0{,}2X_5 - 0{,}2X_6 +$$
$$+ 0{,}4X_7 + 0{,}2X_8 - 0{,}2X_9 - 0{,}2X_{10} + 0{,}3X_{11} - 0{,}1X_{12},$$

где X_1 — школьные достижения в английском языке и арифметике; $X_2 \div X_{12}$ — полярно характеризуемые свойства личности школьников: X_2 — аффектотимия — шизотимия; X_3 — интеллектуальность — неинтеллектуальность; X_4 — сила «я» — общая эмоциональность; X_5 — возбужденность — неуверенность; X_6 — беспечность — озабоченность, X_7 — совестливость (сила — слабость «сверх-я»); X_8 — смелость — робость; X_9 — мягкость — жесткость; X_{10} — мечтательность — практичность; X_{11} — самолюбие и самоконтроль; X_{12} — напряженность потребностей — расслабленность. Очевидно, что при $a_{ij} \equiv 0$ или, что то же самое, $\beta_{ij} = 0$, линейное влияние X_j на условные средние значения X_i отсутствует, т. е. эти переменные некоррелированы (это не означает отсутствия других видов стохастической связи).

При изучении многомерной системы перед исследователем обычно могут возникнуть три задачи, различающиеся по степени проникновения в структуру связей переменных.

Первая задача состоит в том, чтобы установить факты связей и их направление. Решению этой задачи служит так называемый регрессионный анализ, который заключается в определении коэффициентов регрессии и анализе их статистической достоверности.

---

* R. B. Cattell. The Scientific Analysis of Personality. Chicago, 1966, pp. 310—312.

Развитием методов регрессионного анализа является так называемый дисперсионный анализ (глава 6).

Вторая задача состоит в том, чтобы выявить факты парных взаимосвязей в системе и установить их достоверность. Решается эта задача вычислением ковариационной и интеркорреляционной матриц с их последующим анализом.

Третья задача состоит в том, чтобы вскрыть глубинные групповые взаимосвязи (по три, по четыре и т. д. по N) между переменными в системе. Решению этой задачи служат вычисление коэффициентов частной и множественной корреляции с последующим исследованием их статистической достоверности путем так называемого корреляционного анализа. Разновидностью корреляционного анализа является способ корреляционных плеяд.* Углублением и развитием идей корреляционного анализа является факторный анализ (глава 7).

Основные идеи и методы регрессионного и корреляционного анализа мы рассмотрим в главе 5. Здесь же изложим в общем виде процедуры определения необходимых числовых характеристик, которые далее подкрепим примером.

В соответствии с тремя задачами можно вести исследование многомерной системы тремя способами.

Первый способ сводится к вычислению непосредственно коэффициентов множественной регрессии по методу наименьших квадратов. Так как множественную регрессию можно построить для любой из N случайных величин, считая ее зависимой от остальных, то всего необходимо получить N уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{01} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N, \\ x_2 &= a_{02} + a_{21}x_1 + \ldots + a_{2N}x_N, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N &= a_{0N} + a_{N1}x_1 + \ldots + a_{NN-1}x_{N-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.23)$$

в которых все коэффициенты a_{ij} и свободные члены a_{0i} могут быть различны как по значениям, так и по знакам. Чтобы найти неизвестные коэффициенты a_{ij} и a_{0i} для каждой i-той множественной регрессии, необходимо построить и решить систему из N нормальных уравнений.

В общем виде процедура получения системы нормальных уравнений включает две операции, повторяющиеся N раз последовательно ($j = 1, 2, \ldots, N$). Тогда j-тое нормальное уравнение получается:

1) умножением исходного уравнения i-той множественной регрессии

$$x_i = a_{0i} = a_{i2}x_2 + \ldots + a_{iN}x_N$$

---

* П. В. Терентьев. Метод корреляционных плеяд. Вестник ЛГУ, № 9, 1959.

на x_j почленно:

$$x_i x_j = a_{0i} x_j + a_{i2} x_2 x_j + \ldots + a_{iN} x_N x_j, \qquad (4.2.24)$$

причем, при $j = i$ полагают $x_j \equiv 1$;

2) суммированием результатов (4.2.24) почленно:

$$\sum_{r=1}^{n} x_i x_j = a_{0i} \sum_{r=1}^{n} x_j + a_{i2} \sum_{r=1}^{n} x_2 x_j + \ldots + a_{iN} \sum_{r=1}^{n} x_N x_j, \qquad (4.2.25)$$

где n — число наблюдавшихся (группами по N) значений случайных переменных; $r = 1, 2, \ldots, n$ — индекс наблюдения; при $j = i$, очевидно, $\sum_{r=1}^{n} a_{0i} = n a_{0i}$.

В итоге получается метасистема из N^2 уравнений, решая которые, можно определить все искомые коэффициенты и свободные члены множественных регрессий. Нетрудно понять, что уже при $N = 4$ приходится решать 16 уравнений, значит, для исследования многомерных систем полезно использовать вычислительную машину.

Второй способ заключается в том, что первоначально вычисляется корреляционная матрица. Затем с помощью r_{ij} строится N систем нормальных уравнений в β_{ij}-коэффициентах (всего для i-той множественной регрессии $N - 1$ нормальное уравнение),* решением которых определяются все β_{ij}. Чтобы от стандартного перейти к натуральному масштабу, по формуле (4.2.19) надо вычислить все a_{ij}. Свободные члены не определяются через β-коэффициенты непосредственно. Поэтому дополнительно составляют N уравнений вида

$$a_{0i} = \bar{x}_i - \sum_{j \neq i}^{N-1} a_{ij} \bar{x}_j, \qquad (4.2.26)$$

где $\overline{x_i}$ и $\overline{x_j}$ — безусловные средние арифметические случайных величин.

Третий способ — это вариант второго способа, дополненный вычислением по формуле (4.1.13) коэффициентов частной корреляции первого и более высоких порядков. После этого по формуле (4.2.20) вычисляют β_{ij}-коэффициенты, или непосредственно по формуле (4.2.18) — a_{ij}-коэффициенты и по (4.2.26) — свободные члены.

Отметим в заключение, что коэффициент множественной корреляции $R_{i.23\ldots N}$ вычисляется при исследовании N-мерной системы по второму и третьему способу либо по формуле (4.1.16), либо через β_{ij}-коэффициенты — по формуле

$$R_{i.23\ldots N} = \sqrt{\sum_{j \neq i}^{N-1} r_{ij} \beta_{ij}}, \qquad (4.2.27)$$

* Как это делается, рассмотрим ниже, в примере 4.3.2.

где все обозначения прежние. При использовании первого способа можно оценить (без расчета r_{ij} и β_{ij}) коэффициент множественной детерминации по формуле (4.1.14), где остаточная дисперсия

$$D_O = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (x_{ir} - x_{i.\,23\ldots N})^2 \qquad (4.2.28)$$

и x_{ir} — наблюдавшиеся, а $x_{i.23\ldots N}$ — вычисленные по множественной регрессии значения переменной X_i.

§ 4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТА

4.3.1. Оценка вероятностей многомерного распределения

Выявить N-мерную функцию распределения по экспериментальным данным — задача весьма сложная. Во многих случаях ее можно обойти, ограничиваясь выявлением числовых и функциональных характеристик многомерной системы. Только в одном случае это невозможно — при планировании выборочного исследования из неоднородной совокупности (глава 5). В этой связи необходимо иметь хотя бы приближенные оценки вероятностей совместного появления всевозможных групп по N значений изучаемых переменных.

Оценить вероятности $P_{jk\ldots m}$, смысл которых был раскрыт формулами (4.1.3) или (4.1.4), можно либо по данным специально организованного эксперимента, либо используя уже известные данные о безусловных и условных распределениях изучаемых переменных в популяции (например, статистику переписей). Специфика эксперимента, целью которого служит оценка вероятностей $P_{jk\ldots m}$, состоит в *совместной* регистрации значений всех N переменных. Это отнюдь не легко, если учесть, что число совместных наблюдений по формуле (4.1.6) быстро превышает любые практические возможности исследования. Уже при $N > 4$ и $n_i > 3$ целесообразно обращаться к демографическим данным. Однако при небольших системах можно организовать совместное наблюдение в эксперименте. Тогда процедура в общих чертах сводится к тому, что каждую переменную квантуют на двух, максимум — на трех уровнях, совместно регистрируют достаточное для представительности оценок (см. главу 5) количество реализаций в виде групп значений переменных, после чего распределяют их в таблице, как мы покажем ниже, в примере 4.3.1.

Если по каким-либо причинам исследователь решает оценить вероятности многомерного распределения, пользуясь известными данными, то здесь нужно применять формулы (4.1.9) или (4.1.10).

Но использование формулы (4.1.9) связано со значительными расчетами, так как определить каждую вероятность $P_{jk\,m}$ уже для трех зависимых переменных можно шестью способами, используя три безусловных и двенадцать условных вероятностей:

$$P_{jkm} = P_j \cdot P_{k/j} \cdot P_{m/jk} = P_j \cdot P_{m/j} \cdot P_{k/jm} = P_k \cdot P_{j/k} \cdot P_{m/kj} =$$
$$= P_k \cdot P_{m/k} \cdot P_{j/km} = P_m \cdot P_{j/m} P_{k/mj} = P_m \cdot P_{k/m} \cdot P_{j/mk}, \quad (4.3.1)$$

где P_j, P_k, P_m — безусловные вероятности, а $P_{j/k}$, $P_{j/km}$ и т. д. — условные вероятности.

С другой стороны, применять формулу (4.1.10) — это значит допускать априори гипотезу о независимости случайных величин в совокупности, что весьма рискованно. В психологической практике обычны случаи, когда системы образуются переменными, только часть из которых взаимозависимые. Поэтому в конкретном исследовании требуется, комбинируя формулы (4.1.9) и (4.1.10), сначала перечислить в общем виде способы определения всех вероятностей (4.1.3) или (4.1.4) и уже потом разыскивать данные об условных и безусловных распределениях,* которыми необходимо и достаточно воспользоваться для вычисления оценок $P_{jk\ldots m}$.

Пример 4.3.1. В плане комплексного исследования личности от студентов I-го курса факультета психологии ЛГУ были получены оценки социометрического статуса в своей учебной группе (X_1), нейротизма по Айзенку (X_2) и эмоциональной экспансивности (X_3), представленные в табл. 4.3.1. Несмотря на малочисленность данных (всего 42 человека), продемонстрируем оценивание вероятностей совместного распределения социометрического статуса, нейротизма и эмоциональной экспансивности.

Для группировки данных расчленим наблюдавшиеся значения каждой переменной на два уровня, как показано в табл. 4.3.2. Осуществляем группировку, кодируя в пятиричной системе (как и прежде) палочкой факт появления события A_{jkm}, состоящего в том, что на пересечении j-того, k-того и m-ного уровней ($j = 1, 2$; $k = 1,2$; $m = 1,2$) появится «тройка» значений X_1, X_2, X_3. Например, для первой в табл. 4.3.1 «тройки» значений $[(X_1 = 1)(X_2 = 18)(X_3 = 3)]$ имеем событие $A_{222} \equiv [(X_1 = x_{12})(X_2 = x_{22})(X_3 = x_{32})]$, которое кодируем палочкой в соответствующей (правой, нижней) клетке табл. 4.3.2. Окончив группировку, подсчитываем частоты $f_{jkm} = \Sigma A_{ikm}$, суммы частот и оценки вероятностей $p_{jkm} = \frac{1}{42} f_{jkm}$ (см. табл. 4.3.2). Совокупность этих оценок и характеризует совместное распределение социометрического статуса, нейротизма и эмоциональной экспансивности у 42 студентов.

Оценим, далее, степень стохастической связности системы, пользуясь коэффициентом совместной детерминации (4.1.19). Если

* Именно таким путем была создана выборка в 1700 человек, положенная в основу шкалы Векслера (WAIS).

Таблица 4.3.1

Исходные данные к примеру 4.3.1

X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3
1	18	3	8	7	—8
—9	20	—15	8	5	18
22	18	15	—2	17	1
—11	22	—1	—28	12	3
—6	9	—26	2	9	—1
—0,5	12	11	15	12	34
5	13	2	—10	8	13
9	16	10	4	9	9
0	14	—4	19	3	12
2	16	13	2	15	22
11	16	—17	6	14	29
15	17	9	17	9	22
—8	21	—27	7	14	7
0	22	25	8	7	40
9	7	61	4	13	40
8	23	33	7	6	20
15	11	—2	9	16	—50
4	12	34	4	12	19
—8	15	—4	0,5	20	10
—0,7	12	—6	8	12	0
—15	13	—4	9	8	24
Суммы			140,3	555,0	374,0

Обозначения: x_1 — социометрический статус в группе (%); x_2 — нейротизм и x_3 — эмоциональная экспансивность (в баллах)

Таблица 4.3.2

Определение оценок вероятностей P_{jkm} по данным эксперимента
(Обозначения в тексте примера 4.3.1)

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">$x_{21} \equiv X_2 < 13,5$</td><td colspan="2">$x_{22} \equiv X_2 > 13,5$</td></tr>
<tr><td>$x_{31} \equiv X_3 < 0$</td><td>$x_{32} \equiv X_3 \geqslant 0$</td><td>$x_{31} \equiv X_3 < 0$</td><td>$x_{32} \equiv X_3 \geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>$x_{11} \equiv X_1 < 0$</td><td>|||
$f_{111} = 3$
$p_{111} = 0,07$
$p^*_{111} = 0,04$</td><td>|||
$f_{112} = 3$
$p_{112} = 0,07$
$p^*_{112} = 0,10$</td><td>||||
$f_{121} = 4$
$p_{121} = 0,10$
$p^*_{121} = 0,04$</td><td>|
$f_{122} = 1$
$p_{122} = 0,02$
$p^*_{122} = 0,08$</td></tr>
<tr><td>$x_{12} \equiv X_1 \geqslant 0$</td><td>|||
$f_{211} = 3$
$p_{211} = 0,07$
$p^*_{211} = 0,13$</td><td>|||| |||| ||||
$f_{212} = 14$
$p_{212} = 0,34$
$p^*_{212} = 0,28$</td><td>|||
$f_{221} = 3$
$p_{221} = 0,07$
$p^*_{221} = 0,10$</td><td>|||| |||| |
$f_{222} = 11$
$p_{222} = 0,26$
$p^*_{222} = 0,23$</td></tr>
<tr><td>Суммы</td><td colspan="4">$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} f_{jkm} = 42;\ \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} p_{jkm} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} p^*_{jkm} = 1.$</td></tr>
</table>

социометрический статус, нейротизм и эмонациональная экспансивность независимы в совокупности, то для всех j, k и m должно выполняться условие

$$p^*_{jkm} = p_j \cdot p_k \cdot p_m.$$

Следовательно, вычисляя все оценки безусловных вероятностей по формулам (4.1.8) — результаты представлены в табл. 4.3.3, — можем далее определить и оценки p^*_{jkm} в предположении независимости переменных; эти оценки приведены в табл. 4.3.2.

Таблица 4.3.3

Безусловные эмпирические распределения величин социометрического статуса (X_1), нейротизма (X_2) и эмоциональной экспансии (X_3)

для X_1		для X_2		для X_3	
x_{ij}	p_j	x_{2k}	p_k	x_{3m}	p_m
x_{11}	0,26	x_{21}	0 55	x_{31}	0,31
x_{12}	0,74	x_{22}	0,45	x_{32}	0,69
$\sum_{j=1}^{2} p_j$	1,00	$\sum_{k=1}^{2} p_k$	1,00	$\sum_{m=1}^{2} p_m$	1,00

Так как в группировочной табл. 4.3.2 $t = 2$ и $g = 4$, то выполнив расчеты по формуле (4.1.19), получаем $K^2_N \approx 0{,}128$ и $K_N \approx 0{,}36$, что свидетельствует о наличии слабой совместной стохастической связи рассматриваемых переменных. Значит в принципе имеет смысл определять и условные законы распределений; но это выходит за рамки нашего примера.

4.3.2. **Определение множественных регрессий и связанных с ними числовых характеристик**

Используем для демонстрации исходные данные предыдущего примера 4.3.1. *Первый способ* — непосредственный расчет коэффициентов множественных регрессий — требует составления трех систем по три нормальных уравнения в каждой.

Пользуясь алгоритмом составления нормальных уравнений i-той множественной регрессии (стр. 241), составим их для регрессии

$$x_{1.23} = a_{01} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3.$$

Умножая на $x_1 \equiv 1$ и суммируя по числу наблюдений ($r = 1, 2, \ldots, 42$), получаем первое нормальное уравнение:

$$\sum_{r=1}^{42} x_1 = 42a_{01} + a_{12}\sum_{r=1}^{42} x_2 + a_{13}\sum_{r=1}^{42} x_3.$$

Умножая исходное уравнение на x_2 и суммируя, получим второе нормальное уравнение:

$$\sum_{r=1}^{42} x_1 x_2 = a_{01} \sum_{r=1}^{42} x_2 + a_{12} \sum_{r=1}^{42} x_2^2 + a_{13} \sum_{r=1}^{42} x_2 x_3.$$

Умножая исходное уравнение на x_3 и суммируя, получим третье нормальное уравнение:

$$\sum_{r=1}^{42} x_1 x_3 = a_{01} \sum_{r=1}^{42} x_3 + a_{12} \sum_{r=1}^{42} x_2 x_3 + a_{13} \sum_{r=1}^{42} x_3^2.$$

Аналогичным образом получаем и две других системы нормальных уравнений, для переменных x_2 и x_3 соответственно:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_r x_2 &= 42 a_{02} + a_{21} \sum_r x_1 + a_{23} \sum_r x_3, \\
\sum_r x_2 x_1 &= a_{02} \sum_r x_1 + a_{21} \sum_r x_1^2 + a_{23} \sum_r x_1 x_3, \\
\sum_r x_2 x_3 &= a_{02} \sum_r x_3 + a_{21} \sum_r x_1 x_3 + a_{23} \sum_r x_3^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_r x_3 &= 42 a_{03} + a_{31} \sum_r x_1 + a_{32} \sum_r x_2, \\
\sum_r x_3 x_1 &= a_{03} \sum_r x_1 + a_{31} \sum_r x_1^2 + a_{32} \sum_r x_1 x_2, \\
\sum_r x_3 x_2 &= a_{03} \sum_r x_2 + a_{31} \sum_r x_1 x_2 + a_{32} \sum_r x_2^2.
\end{aligned}\right\}$$

Чтобы определить все девять неизвестных (3 свободных члена и 6 коэффициентов множественных регрессий), необходимо по исходным данным (см. табл. 4.3.1) вычислить суммы значений каждой переменной, квадратов значений и парных произведений. Промежуточные значения и суммы квадратов и произведений представлены в табл. 4.3.4. Теперь можем записать в явном виде:

$$\left.\begin{aligned}
140{,}3 &= 42 \cdot a_{01} + 555 \cdot a_{12} + 374 \cdot a_{13}, \\
1394{,}6 &= 555 \cdot a_{01} + 8331 \cdot a_{12} + 3969 \cdot a_{13}, \\
3678{,}7 &= 374 \cdot a_{01} + 3969 \cdot a_{12} + 20292 \cdot a_{13}
\end{aligned}\right\} \text{ для } x_{1.23};$$

$$\left.\begin{aligned}
555 &= 42 \cdot a_{02} + 140{,}3 \cdot a_{21} + 374 \cdot a_{23}, \\
1394{,}6 &= 140{,}3 \cdot a_{02} + 4290 \cdot a_{21} + 3678{,}7 \cdot a_{23}, \\
3969 &= 374 \cdot a_{02} + 3678{,}7 \cdot a_{21} + 20292 \cdot a_{23}
\end{aligned}\right\} \text{ для } x_{2.13};$$

$$\left.\begin{aligned}
374 &= 42 \cdot a_{03} + 140{,}3 \cdot a_{31} + 555 \cdot a_{32}, \\
3678{,}7 &= 140{,}3 \cdot a_{03} + 4290 \cdot a_{31} + 1394{,}6 \cdot a_{32}, \\
3969 &= 555 \cdot a_{03} + 1394{,}6 \cdot a_{31} + 8331 \cdot a_{32}
\end{aligned}\right\} \text{ для } x_{3.12}.$$

Таблица 4.3.4

Промежуточные переменные к расчету коэффициентов множественной регрессии, ковариаций и коэффициентов парной корреляции

x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3
1	324	9	18	3	54	64	49	64	56	—64	—56
81	400	225	—180	135	—300	64	25	324	40	144	90
484	324	225	396	330	270	4	289	1	—34	—2	17
121	484	1	—242	11	—22	784	144	9	—336	—84	36
36	81	676	—54	156	—234	4	81	1	18	—2	—9
0,25	144	121	—6	—5,5	132	225	144	1126	180	510	408
25	169	4	65	10	26	100	64	169	—80	—130	104
81	256	100	144	90	160	16	81	81	36	36	81
0	196	16	0	0	—56	361	9	144	57	228	36
4	256	169	32	26	208	4	225	484	30	44	330
121	256	289	176	—187	—272	36	196	841	84	174	406
225	289	81	255	135	153	289	81	484	153	374	198
64	441	729	—168	216	—567	49	196	49	98	49	98
0	484	625	0	0	550	64	49	1600	56	320	280
81	49	3721	63	549	427	16	169	1600	52	160	520
64	529	1089	184	264	759	49	36	400	42	140	120
225	121	4	165	—30	—22	81	256	2500	144	—450	—800
16	144	1126	48	136	408	16	144	361	48	76	228
64	225	16	—120	32	—60	0,25	400	100	10	5	20 0
0,49	144	36	—8,4	4,2	—72	64	144	0	96	0	0
225	169	16	—195	60	—52	81	64	576	72	216	192
Суммы						4290,0	8331,0	20292,0	1394,6	3678,7	3969,0

Решая эти системы уравнений любым известным способом, получаем приближенные значения шести a_{ij} (они приведены в табл. 4.3.6) и свободных членов:

$$a_{01} \approx 6,73; \quad a_{02} \approx 13,9; \quad a_{03} \approx 16,4.$$

Теперь можем записать искомые регрессии:

$$x_{1,23} = 6,73 - 0,34x_2 + 0,124x_3,$$

$$x_{2.13} = 13,9 - 0,09x_1 - 0,04x_3,$$

$$x_{3.12} = 16,4 + 0,55x_2 - 0,77x_1.$$

Заметим, что пользуясь найденными множественными регрессиями, можно определить коэффициенты множественной детерминации следующим образом:

$$\eta_i^2 = 1 - \frac{1}{42 \cdot D_i} \sum_{r=1}^{42} (x_i - x_i^*)^2,$$

где D_i — безусловная дисперсия, определяемая обычным путем: $D_i = \frac{1}{42}\sum_{r=1}^{42}[x_i - M(x_i)]^2$; x_i — наблюдавшиеся значения i-той переменной; x_i^* — вычисленные по i-той множественной регрессии ожидаемые значения i-той переменной.

Не вычисляя здесь величин η_i^2, отметим, что всегда $\eta_i^2 \geqslant R_i^2$, где R_i^2 — коэффициенты линейной детерминации, определяемые формулами (4.1.16) или (4.2.27).

По *второму способу* вычисления начинаются с определения значений элементов ковариационной матрицы, стандартных отклонений, а затем и парных коэффициентов корреляции, причем используются те же самые суммы из табл. 4.3.1 и 4.3.4. Результирующие ковариационная и корреляционная матрицы и значения стандартных отклонений приведены в табл. 4.3.5. По

Таблица 4.3.5

Ковариационная (*а*), корреляционная (*б*) матрицы, и безусловные стандартные отклонения переменных (*в*) первой выборки, из примера 4.3.1; корреляционная матрица (*г*) второй выборки (к примеру 5.2.5)

X_1 — социометрический статус на курсе, X_2 — нейротизм, X_3 — эмоциональная экспансия, n_2-57 человек.

		X_1	X_2	X_3
а	X_1	91,0	−11,1	58,0
	X_2	−11,1	24,0	−23,0
	X_3	58,0	−23,0	404,0
		X_1	X_2	X_3
б	X_1	1	−0,238	0,302
	X_2	−0,238	1	−0,234
	X_3	0,302	−0,234	1
в	σ_i	9,54	4,90	20,10
		X_1	X_2	X_3
г	X_1	1	−0,276	0.162
	X_2	−0,276	1	−0,347
	X_3	0,162	−0,347	1

корреляционной матрице построим корреляционный граф рассматриваемой системы, он изображен на рис. 4.1.3.

Системы нормальных уравнений для вычисления β_{ij}-коэффициентов получим следующим путем.

1) Выберем из корреляционной матрицы подматрицу, удаляя строку и столбец той переменной, которую считаем зависимой. Так, для социометрического статуса (X_1) находим подматрицу (1), для нейротизма (X_2) — подматрицу (2), а для эмоциональной экспансивности (X_3) — подматрицу (3):

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{23} & 1 \end{bmatrix} (1); \quad \begin{bmatrix} 1 & r_{13} \\ r_{13} & 1 \end{bmatrix} (2); \quad \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} (3).$$

2) Сформируем для каждой из этих подматриц диагональную подматрицу β_{ij}-коэффициентов (где i — номер зависимой переменной, j — номера независимых):

$$\begin{bmatrix} \beta_{12} & 0 \\ 0 & \beta_{13} \end{bmatrix} (1); \quad \begin{bmatrix} \beta_{21} & 0 \\ 0 & \beta_{23} \end{bmatrix} (2); \quad \begin{bmatrix} \beta_{31} & 0 \\ 0 & \beta_{32} \end{bmatrix} (3).$$

3) Перемножим слева подматрицы парных коэффициентов на соответствующие подматрицы β-коэффициентов, в результате получим

$$\begin{bmatrix} \beta_{12} & r_{23}\beta_{13} \\ r_{23}\beta_{12} & \beta_{13} \end{bmatrix} (1); \quad \begin{bmatrix} \beta_{21} & r_{13}\beta_{23} \\ r_{13}\beta_{21} & \beta_{23} \end{bmatrix} (2); \quad \begin{bmatrix} \beta_{31} & r_{12}\beta_{32} \\ r_{12}\beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} (3),$$

где $\beta_{12} = \beta_{21}$; $\beta_{13} = \beta_{31}$ и $\beta_{23} = \beta_{32}$ так же, как и для парных коэффициентов корреляции.

4) К каждой полученной подматрице слева, построчно, припишем через знак равенства коэффициенты корреляции из удаленного ранее столбца, а элементы справа от знака равенства суммируем:

$$\left.\begin{aligned} r_{12} &= \beta_{12} + r_{23}\beta_{13} \\ r_{13} &= r_{23}\beta_{12} + \beta_{13} \end{aligned}\right\} (1); \quad \left.\begin{aligned} r_{12} &= \beta_{21} + r_{13}\beta_{23} \\ r_{23} &= r_{13}\beta_{21} + \beta_{23} \end{aligned}\right\} (2); \quad \left.\begin{aligned} r_{13} &= \beta_{31} + r_{12}\beta_{32} \\ r_{23} &= r_{12}\beta_{31} + \beta_{32} \end{aligned}\right\} (3).$$

Подставляя из исходной корреляционной матрицы значения r_{ij}, запишем системы нормальных уравнений в явном виде:

$$\left.\begin{aligned} -0{,}238 &= \beta_{12} - 0{,}234\beta_{13}, \\ 0{,}302 &= -0{,}234\beta_{12} + \beta_{13} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}238 &= \beta_{21} + 0{,}302\beta_{23}, \\ -0{,}234 &= 0{,}302\beta_{21} + \beta_{23}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}302 &= \beta_{31} - 0{,}238\beta_{32}, \\ -0{,}234 &= -0{,}238\beta_{31} + \beta_{32}. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, получим следующие приближенные значения β-коэффициентов:

$$\beta_{12} = -0{,}184; \quad \beta_{21} = -0{,}177; \quad \beta_{13} = 0{,}261;$$

$$\beta_{31} = 0{,}261; \quad \beta_{23} = -0{,}179; \quad \beta_{32} = -0{,}172.$$

Можно видеть, что различия между «симметричными» β-коэффициентами малы (эти различия вызваны округлением исходных r_{ij}-коэффициентов).

Вычисляя теперь по формуле (4.2.19) коэффициенты множественных регрессий, получаем те же значения (табл. 4.3.6). Далее, по формуле (4.2.27) определяем значения линейных коэффициентов множественной детерминации:

$$R^2_{1.23} \approx 0{,}121; \quad R^2_{2.13} \approx 0{,}086; \quad R^2_{3.12} \approx 0{,}119,$$

а по формуле (4.1.16б) — коэффициенты множественной акорреляции, приведенные на диагонали табл. 4.3.6. Изображая полученные множественные регрессии в виде регресионных подграфов, как показано на рис. 4.2.1, *а*, *б* и *в*, можем затем объединить их в регрессионный граф (рис. 4.2.1, *г*), матрица которого дана в табл. 4.3.6.

Таблица 4.3.6

Матрица регрессионного графа на рис. 4.3.2

	X_1	X_2	X_3
X_1	$\overline{R}_{1.23} = 0{,}94$	$a_{12} = -0{,}34$	$a_{13} = 0{,}124$
X_2	$a_{21} = -0{,}09$	$\overline{R}_{2.13} = 0{,}96$	$a_{23} = -0{,}04$
X_3	$a_{31} = 0{,}55$	$a_{32} = -0{,}71$	$\overline{R}_{3.12} = 0{,}94$

Третий способ дополняет проделанную работу вычислением коэффициентов частной корреляции. В нашем случае трех переменных по формуле (4.1.12) получаем

$$r_{12.3} \approx -0{,}181; \quad r_{13.2} \approx 0{,}261; \quad r_{23.1} \approx -0{,}175,$$

после чего можем проверить найденные выше значения R^2_i по формуле (4.1.16) и значения a_{ij} — по формуле (4.2.20) — вычисления правильны.

Попытаемся теперь содержательно интерпретировать полученные регрессии и корреляции на качественном уровне. Корреляционный граф (рис. 4.1.3) показывает, что нейротизм отрицательным образом взаимосвязан со статусом и эмоциональной экспансивностью, которые, в свою очередь, взаимосвязаны положительно. Во взаимосвязях, отображаемых r_{ij}, однако, аккумулировано влияние третьей переменной. Парциальные коэффициенты $r_{ij.m}$ «снимают» это влияние. Действительно, можем видеть, что каждая из переменных «усиливает» взаимосвязь двух остальных

(все $r_{ij.m} < r_{ij}$). Вот, пожалуй, и все, что можно сказать на основании r_{ij} и $r_{ij.m}$, причем не более, чем в гипотетическом плане.

Гораздо больше сведений нам дает регрессионный граф (рис. 4.2.1). Во-первых, можно видеть, что взаимовлияния на деле оказываются почти односторонними влияниями. Действительно, действия социометрического статуса и эмоциональной экспансивности на нейротизм столь малы по сравнению с воздействием нейротизма на эти переменные, что ими можно пренебречь. Нейротизм выступает как одна из причин, обусловливающих социометрический статус личности и ее эмоциональную экспансивность. Влияние социометрического статуса на эмоциональную экспансивность более, чем в 4 раза выше обратного влияния, что прекрасно подтверждает известное положение преимущественного обусловливания социального поведения социальным окружением. Заметим, что характер влияний в системе, вскрываемый регрессионным графом, не выявляется отдельными регрессионными подграфами. Отсюда вытекает необходимость регрессионного исследования системы в целом.

Представляет интерес оценка стохастической связности системы рассматриваемых переменных, полученная в виде коэффициента совместной детерминации $K_3^2 \approx 0{,}128$. Заметим, что, действительно, совместная детерминация больше наибольшей множественной детерминации, оцениваемой $\mathrm{R}_{1.23}^2 \approx 0{,}121$. Близость значений K_3^2 и $\mathrm{R}_{1.23}^2$, возможно, свидетельствует о хорошем приближении регрессий в системе линейными функциями. С другой стороны, как отдельные переменные, так и система в целом более обусловлены извне неконтролируемыми факторами, чем изнутри — друг другом. Это позволяет предполагать, что социометрический статус в группе, нейротизм и эмоциональная экспансивность скорее входят в другие системы, чем сами образуют систему. Такое предположение вытекает и из малых величин коэффициентов парной корреляции, на которых основаны все остальные показатели. Но было бы неосторожным отбрасывать полученные сведения только на основании малости величин r_{ij}, так как эти сведения не противоречат известным теоретическим положениям и экспериментальным фактам.

§ 4.4. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

4.4.1. Свойства и количественные характеристики случайных функций

В начале главы было дано определение случайной функции как системы случайных величин. Это не единственно возможное определение,* но мы ограничимся им при дальнейшем изложении.

Случайная функция $Y(X)$, заданная на множестве n своих

* Другие определения приводятся в специальной литературе (см. список литературы).

реализаций y_j (X) (где $j = 1, 2, \ldots, n$), принимающих значения y_j (x_i) (где $i = 1, 2, \ldots, N$), на множестве N фиксированных значений x_i аргумента X, либо значений интервалов квантования λ_i, средними значениями которых выступают x_i, полностью определяется N-мерным законом распределения вероятностей $P[y_j\ (x_i)]$, которые в принципе ничем не отличаются от вероятностей $P_{jk\ldots m}$, рассмотренных выше.

Обычно для непрерывных аргументов число N интервалов квантования, необходимое для изучения случайной функции $Y\ (X)$, должно быть порядка сотен и тысяч.* Поэтому в общем случае даже для случайных функций одного аргумента определить функции или плотность распределения не представляется возможным. Лишь для сравнительно редких видов случайных функций, как будет отмечено ниже, могут быть заданы законы распределения. В большинстве случаев приходится ограничиваться количественными характеристиками отдельных свойств многомерного закона распределения случайной функции.

Случайная функция одного аргумента $Y\ (X)$, реализации которой рассматриваются на плоскости XOY (рис. 4.1.2), характеризуется теми же свойствами, что и система случайных величин: положением, рассеиванием и связностью (асимметрия и эксцесс обычно не рассматриваются). Но в отличие от случайной величины или системы, эти же свойства у случайной функции выражаются количественно не с помощью числовых мер, а посредством неслучайных функций, образуемых мерами положения, рассеивания и связи от того же аргумента X.

Математическим ожиданием случайной функции $Y\ (X)$ называется неслучайная функция $\mathrm{M}\,[Y\ (X)]$, которая при каждом фиксированном значении аргумента x_i равна условному среднему арифметическому значению случайной функции $\mathrm{M}\ (y/x_i)$, определенному для всех возможных реализаций $Y\ (X)$. Таким образом, математическое ожидание случайной функции — это регрессия условных средних «y по x». Математическое ожидание случайной функции можно рассматривать как некоторую среднюю из возможных реализаций.

Математическое ожидание случайной функции имеет те же свойства, что и среднее арифметическое значение суммы и произведения случайных величин (4.2.3), (4.2.6) и (4.2.7), только речь идет уже о суммировании или умножении не чисел, а функций. Так, математическое ожидание простой суммы из R случайных функций одного и того же аргумента равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$\mathrm{M}\left[\sum_{r=1}^{R} Y_r\,(X)\right] = \sum_{r=1}^{R} \mathrm{M}\,[Y_r\,(X)]. \qquad (4.4.1)$$
$$r = 1, 2, \ldots, R$$

---

* А. Ф. Романенко, Г. А. Сергеев. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. «Советское радио», М., 1968.

В частности, прибавление к случайной функции $Y(X)$ неслучайной функции $\psi(X)$ увеличивает математическое ожидание случайной функции на эту функцию:

$$M[Y(X)+\psi(X)] = M[Y(X)] + \psi(X). \qquad (4.4.2)$$

Это позволяет *центрировать* случайную функцию, вычитая из ее значений значения математического ожидания для тех же значений аргумента. Центрированная случайная функция $\overset{0}{Y}(X)$ есть функция центральных отклонений, заданная на множестве значений аргумента:

$$\left.\begin{aligned} \overset{0}{Y}(X) &= Y(X) - M[Y(X)], \\ X &= x_i,\ i = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.3)$$

Умножение случайной функции на неслучайную функцию того же аргумента $\psi(X)$ увеличивает математическое ожидание в $\psi(X)$ раз.

$$M[\psi(X)\cdot Y(X)] = \psi(X)\cdot M[Y(X)]. \qquad (4.4.4)$$

Это свойство позволяет *нормировать* случайную функцию какой-либо неслучайной функцией, чаще всего стандартным отклонением.

Рис. 4.4.1. Иллюстрация свойства связности случайной функции. *а* — сильно связная функция, ее изменения медленны; *б* — слабо связная функция, ее изменения быстры.

Дисперсией случайной функции $Y(X)$ называется неслучайная функция $D[Y(X)]$, значение которой для каждого из значений аргумента есть условная дисперсия $D(y/x_i)$, определяемая также рассмотренными уже способами.

Среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной функции есть неслучайная функция $\sigma[Y(X)]$, значения которой для всех x_i

$$\sigma[y/x_i] = \sqrt{D(y/x_i)}. \qquad (4.4.5)$$

Очевидно, что $D[Y(X)]$ и $\sigma[Y(X)]$ — это регрессии условных дисперсий и условных стандартных отклонений значений случайной функции при всех значениях аргумента, — регрессии, характеризующие рассеивание реализаций случайной функции на плоскости XOY (см. рис. 4.1.2).

Свойство связности для случайной функции есть свойство более быстрой (или медленной) изменчивости ее значений по мере изменения аргумента (рис. 4.4.1). Степень (сила) связи между

любыми двумя значениями случайной функции характеризуется автокорреляционной функцией.

Автокорреляционная (корреляционная, ковариационная) функция К $[Y(x_i), Y(x_j)]$ случайной функции $Y(X)$ есть неслучайная функция двух значений x_i, x_j того же аргумента, которая для каждой пары условных распределений «y по x» численно равна ковариации

$$K[Y(x_i), Y(x_j)] = COV\left[\overset{0}{Y}_i \cdot \overset{0}{Y}_j\right]. \tag{4.4.6a}$$

Распространено другое обозначение корреляционной функции. Пусть x — некоторое произвольное значение аргумента, принятое за начало отсчета. Выберем новое значение аргумента $x + \tau$, где

$$0 \leqslant \tau \leqslant x_{max}$$

называется «сдвигом» аргумента. Тогда корреляционная функция есть регрессия ковариаций, определенных для всех τ:

$$K_{YY}(\tau) = K[Y(x),\ Y(x+\tau)], = COV[\overset{0}{Y}(x),\ \overset{0}{Y}(x+\tau)],$$

где $\overset{0}{Y}(x)$ и $\overset{0}{Y}(x+\tau)$ — центрированные значения случайной функции в условных распределениях y/x и $y/x+\tau$.

Важное прикладное значение имеют свойства корреляционной функции:

1) она симметрична относительно ординаты;

2) она равна дисперсии случайной функции при $\tau = 0$ (аналогично тому, как $COV[XX] \equiv D([X])$,

3) она убывает до нуля при увеличении τ:

— *монотонно* (рис. 4.4.2, *а*), если случайная функция не содержит периодических неслучайных компонент;

— *колеблясь* вокруг оси абсцисс (рис. 4.4.2, *б*), если такая периодическая компонента имеется; при этом частота колебаний $K_{YY}(\tau)$ соответствует основной частоте колебаний периодической компоненты, чем и пользуются на практике для гармонического анализа случайных функций; *

4) она убывает, монотонно или колеблясь (рис. 4.4.2, *в*), до некоторого постоянного значения c^2, где c есть стандартная ошибка центрирования случайной функции и вычисления дисперсий и ковариаций.

Величина τ, при которой корреляционная функция достигает оси абсцисс или асимптоты c^2 (монотонно или колеблясь), называется *интервалом корреляции*. Он показывает, для какого изменения аргумента значения случайной функции взаимозависимы. Если интервал корреляции $\tau \approx 0$, то значения реализации случайной функции образуют последовательность, аналогичную

---

* Г. А. Сергеев, Л. П. Павлова, А. Ф. Романенко. Статистические методы исследования электроэнцефалограммы человека, «Наука», 1968.

цепи Бернулли. Если интервал корреляции $\tau = x_{i+1} - x_i = 1$, то значения каждой реализации случайной функции образуют простую цепь Маркова.

Случайная функция, каждое значение которой выражено в единицах стандартного отклонения при соответствующем значении аргумента, называется нормированной. Центрированная и нормированная случайная функция задается своими основными отклонениями.

Корреляционная функция нормированной случайной функции называется *нормированной корреляционной* (автокорреляционной) функцией. Она может быть получена двумя путями: либо как

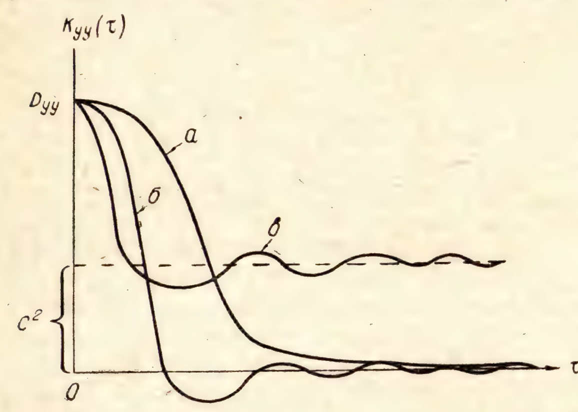


Рис. 4.4.2. Автокорреляционная функция случайной функции в зависимости от сдвига τ.
Пояснения в тексте.

$K[Y_N(\overset{0}{X}) \cdot Y_N(\overset{0}{X} + \tau)]$, где $Y_N(\overset{0}{X})$ — нормированные и центрированные значения случайной функции, либо нормированием значений корреляционной функции при всех значениях сдвига τ:

$$R_{YY}(\tau) = \frac{K_{YY}(\tau)}{\sigma_Y(X) \cdot \sigma_Y(X+\tau)}. \qquad (4.4.7)$$

Можно видеть, что нормированная корреляционная функция есть регрессия по τ парных коэффициентов линейной корреляции, вычисляемых для всех рассматриваемых $0 \leqslant \tau \leqslant x_{\max}$. Очевидно, что максимум $R_{YY}(\tau = 0) = 1$, как и для r_{ij}. Остальные рассмотренные свойства корреляционной функции сохраняются.

Свойство связности для случайной функции двух и более аргументов или для системы «одномерных» и «многомерных» случайных функций не исчерпывается автокорреляцией и дополняется понятием взаимной корреляции. Соответственно здесь рассматриваются взаимнокорреляционные функции и нормированные взаимнокорреляционные функции.

Взаимнокорреляционная (кросскорреляционная) функция случайной функции двух аргументов $Y(X, Z)$ или (что то же самое) двух «одномерных» случайных функций $Y(X)$ и $U(Z)$, рассматриваемых совместно, есть неслучайная функция всех пар значений

x, z двух аргументов, образованная ковариациями соответствующих условных распределений $\mathrm{COV}_{YY}(X, Z)$ или $\mathrm{COV}_{YU}(X, Z)$. Свойства взаимнокорреляционной функции подобны свойствам корреляционной:

1) она симметрична;

2) она максимально равна произведению соответствующих стандартных отклонений:

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{K}_{YY}(X, Z)]_{\max} &= \sigma_Y(X)\cdot\sigma_Y(Z), \\ [\mathrm{K}_{YU}(X, Z)]_{\max} &= \sigma_Y(X)\cdot\sigma_U(Z); \end{aligned}\right\} \quad (4.4.8)$$

3) Если $\mathrm{K}_{YY}(X, Z) \equiv 0$, то аргументы X и Z некоррелированы, если же $\mathrm{K}_{YU}(X, Z) \equiv 0$, то случайные функции $Y(X)$ и $U(Z)$ некоррелированы.

4) Нормированные взаимнокорреляционные функции убывают от единицы до нуля, монотонно или колеблясь.

Учитывая понятия авто- и взаимнокорреляционных функций, можно выделить следующие практически важные свойства дисперсии и корреляционной функции для суммы случайных функций одинаковых аргументов.

Дисперсия суммы случайных функций равна сумме максимумов автокорреляционных и взаимнокорреляционных функций слагаемых:

$$\mathrm{D}\left[\sum_{r=1}^{R} Y_r(X)\right] = \underbrace{\left\{\sum_{r=1}^{R} \mathrm{K}\,[Y_r(X), Y_r(X+\tau)]\right\}_{\max}}_{\sum_{r=1}^{R} \mathrm{D}\,[Y_r(X)]} + \left\{\sum_{r=1}^{R} \mathrm{K}\,[Y_i(X), Y_j(X)]\right\}_{\max}; \quad (4.4.9)$$

где $r = 1, 2, \ldots, R$; $i = 1, 2, \ldots, R$; $j = 1, 2, \ldots, R$. В частности, для некоррелированных слагаемых

$$\left\{\sum_{r=1}^{R} \mathrm{K}\,[Y_i(X), Y_j(X)]\right\}_{\max} = 0,$$

и дисперсия суммы есть только сумма дисперсий слагаемых. Заметим, что рассмотренные выше формулы дисперсии суммы случайных величин (4.2.4) и (4.2.5) — это частные случаи (4.4.9.).

Аналогично можем записать и более общее равенство для корреляционной функции суммы случайных функций:

$$\mathrm{K}\left[\sum_{r=1}^{R} Y_r(X)\right] = \sum_{r=1}^{R} \mathrm{K}\,[Y_r(X), Y_r(X+\tau)] + \sum_{r=1}^{R} \mathrm{K}\,[Y_i(X), Y_j(X)], \quad (4.4.10)$$

где рассматриваются уже не только максимальные, но любые значения сумм автокорреляционных и взаимнокорреляционных функций. В частном случае взаимной некоррелированности слагаемых функций последнее слагаемое обращается в нуль, поэтому корреляционная функция суммы некоррелированных слагаемых равна сумме автокорреляционных функций этих слагаемых.

4.4.2. Некоторые классы случайных функций, важные для психологии

Все разнообразие случайных функций классифицируется по нескольким основаниям.

По числу аргументов мы уже выделяли случайные функции одного аргумента («одномерные») и двух и более аргументов («многомерные»). В последнем случае рассмотрению подлежат метасистемы. Очевидно, ансамбли физиологических и психологических функций следует рассматривать именно таким образом.

По физической природе аргументов принято выделять случайные процессы как случайные функции от времени. Для психологов случайные процессы представляют особый интерес, так как все психические процессы, безусловно, являются случайными и должны исследоваться посредством аппарата теории случайных процессов.

Классу случайных процессов противостоит класс случайных функций от других аргументов любой природы. Здесь представляет интерес выделение случайных функций от многих аргументов, природа которых различна. В психологических и смежных приложениях такими аргументами служат комплексы воздействий внешней и внутренней среды организма, включая не только случайные, но и целенаправленные воздействия: педагогические, социальные, медицинские.

Разумеется, что основной понятийный и вычислительный аппарат теории случайных функций не зависит от физической природы аргументов. По тому, *являются ли аргумент и функция* (как способ связи) *случайными*, можно выделить случайные функции неслучайных аргументов и неслучайные функции случайных аргументов.

Типичными примерами *случайных функций неслучайных аргументов* являются результаты строго дозированных воздействий лекарств, физических сенсорных стимулов, или обучающих программ на людей. Результаты этих воздействий — соматические, физиологические и психические состояния, а также социальное положение из-за флюктуаций внутренней среды организма являются случайными функциями.

Неслучайные функции случайных аргументов мы рассматривали выше. Но следует добавить сюда любые инструментальные действия человека.

Наконец, в общем виде *случайные функции случайных аргументов*, очевидно, охватывают большинство психических процессов и функций.

По степени изменчивости количественных характеристик случайной функции в зависимости от изменений аргумента выделяют стационарные, квазистационарные и нестационарные случайные функции.

Стационарные случайные функции наиболее изучены. Случайная функция *стационарна в узком смысле*, если для всех значений аргумента ее условный закон распределения неизменен. Такая функция полностью определяется одномерным распределением. Случайная функция *стационарна в широком смысле*, если ее математическое ожидание и дисперсия суть константы (т. е. не зависят от аргумента), а корреляционная функция зависит только от сдвига τ и не зависит от начала отсчета.

Нестационарной называют случайную функцию, для которой условия стационарности в широком смысле не выполняются. Если при этом изменения $\mathrm{M}\ [Y\ (X)]$ и $\mathrm{D}\ (Y\ (X)]$ в некотором смысле не велики, а $\mathrm{K}\ [Y\ (X),\ Y\ (X + \tau)]$ слабо зависит от начала отсчета сдвига τ, то случайную функцию называют *квази* (почти) *стационарной*. Отметим, что разработка классификации нестационарных случайных функций лишь начинается *.

Для психологии чрезвычайно важно установить принадлежность изучаемых психических процессов, состояний и свойств к стационарному или нестационарному классу функций. Дело в том, что подавляющее большинство статистических мер и методов разработано для условий стационарности, тогда как общеизвестны возрастная, сезонная, недельная, суточная и т. п. периодичность случайных изменений психики, а также ее изменчивость от целенаправленных обучающих и воспитательных воздействий. Можно сказать, что большинство явлений психики не удовлетворяет условиям стационарности. И тогда задача исследования может состоять в установлении областей значений аргументов, для которых можно говорить о квазистационарности.

По возможности заменить изучение множества реализаций случайной функции изучением ее одной, но достаточно длинной реализации выделяют эргодические и неэргодические случайные функции.

Эргодическими называются случайные функции, для которых математическое ожидание и корреляционная функция, определенные по множеству реализаций, равны полученным по одной реализации. Для *неэргодических* они не равны. Очевидно, что все эргодические функции стационарны хотя бы в широком смысле.

Для психологических исследований понятие эргодичности весьма важно. Ведь тщательное изучение одного человека экономически выгоднее, да и редкие психические явления невозможно изучать в большом количестве. С другой стороны, только для эргодических процессов и функций результаты, полученные на

---

* А. Ф. Романенко, Г. С. Сергеев. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. «Советское радио», М., 1968.

множестве людей, в короткий период времени могут быть перенесены на отдельных людей и, наоборот, результаты лонгитудинальных исследований отдельных индивидов (или малых групп) могут быть справедливы для больших групп. Следовательно, необходимо исследовать психические явления на эргодичность, т. е. определять их количественные характеристики и по множеству, и по отдельным реализациям.

4.4.3. **Определение характеристик случайной функции из эксперимента**

При экспериментальном изучении случайной функции можно выделить две ситуации: наблюдений достаточно для группировки данных и определения оценочной функции распределения и наблюдений мало для этого; тогда определяются оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции.

Чтобы определить закон распределения случайной функции от одного аргумента, поступают так же, как для двух случайных величин (глава 3). Не повторяя рассмотренного, для примера покажем лишь результат. В табл. 4.4.1 представлены условные

Таблица 4.4.1

Условные распределения частостей ошибки слежения в функции от времени

y — средние значения интервалов квантования ошибки слежения, *мм*;
t — средние значения интервалов квантования времени, *сек*;
$M[Y(t)]$ — оценки математического ожидания;
$\sigma[Y(t)]$ — оценки стандартного отклонения ошибки слежения.

y, t	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
—4,4	0,001	0,001								
—4,0	—	—								
—3,6	0,001	—								
—3,2	0,009	0,002								
—2,8	0,028	0,006								
—2,4	0,035	0,010								
—2,0	0,115	0,020	0,001				0,001	0,001		0,001
—1,6	0,097	0,036	0,005	0,002	0,003	0,004	0,008	0,001		0,003
—1,2	0,243	0,081	0,045	0,025	0,019	0,015	0,014	0,021	0,013	0,016
—0,8	0,260	0,162	0,098	0,110	0,102	0,092	0,058	0,061	0,067	0,069
—0,4	0,183	0,325	0,329	0,302	0,334	0,304	0,353	0,390	0,412	0,403
0,0	0,026	0,140	0,230	0,272	0,285	0,283	0,283	0,302	0,289	0,337
0,4	0,002	0,157	0,221	0,227	0,191	0,236	0,212	0,180	0,166	0,128
0,8		0,044	0,060	0,054	0,058	0,052	0,061	0,034	0,040	0,035
1,2		0,009	0,006	0,007	0,008	0,012	0,010	0,010	0,012	0,006
1,6		0,003	0,002	0,001		0,002			—	0,001
2,0		0,002	0,002						0,001	0,001
2,4		0,001								
$M[Y(t)]$	—1,16	—0,39	—0,12	—0,10	—0,11	—0,07	—0,07	—0,08	—0,12	—0,15
$\sigma[Y(t)]$	0,68	0,74	0,53	0,48	0,47	0,48	0,47	0,44	0,43	0,43

законы распределения частостей ошибки слежения за движущейся целью в функции от времени слежения, в условиях, когда испытуемый запаздывает с реакцией *. Оценки значений математического ожидания и стандартного отклонения ошибки слежения в функции от времени приведены в нижних строках таблицы. Видно, что они изменяются, следовательно, слежение — нестационарный процесс.

Рассмотрим процедуру вычисления оценок для количественных характеристик случайной функции.

Пример 4.4.1. Пусть человек непрерывно прицеливается в движущуюся цель в течение времени T. Отклонения прицельного приспособления от цели в каждый момент времени t образуют ошибку слежения, величина которой (y) случайна. Таким образом, ошибку слежения можно рассматривать как случайную функцию времени, которую обозначим $Y(T)$. Значения двадцати трех реализаций этой случайной функции для одиннадцати значений времени приведены в таблице 4.4.2. **

Таблица 4.4.2

Реализации ошибки слежения к примеру 4.4.1

№, t	0,00	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
1	+0,3	—1,8	—0,4	—0,6	—0,8	—0,2	—0,6	—0,2	—0,4	—0,5	—0,2
2	+1,0	—0,5	—0,4	—1,4	—0,4	—0,6	—0,4	—1,5	+0,7	—0,5	—0,8
3	+0,3	—0,5	+1,2	+1,6	—0,6	—1,1	—0,2	0	0	0	0
4	+0,8	—2,0	—0,4	+1,1	+1,1	+0,2	0	—0,3	—0,3	—0,6	—0,7
5	+0,6	—2,2	—1,2	+0,8	+0,3	—0,6	—0,4	+0,2	—0,9	—0,5	0
6	+0,4	—1,3	—0,8	—0,3	0	—0,4	+0,5	+0,6	—0,6	—0,8	—0,6
7	+0,5	—2,2	—0,3	—0,2	—0,5	—0,1	—0,3	—0,4	+0,1	—0,8	—0,2
8	+0,5	—3,0	—1,8	—0,4	+0,2	+0,8	—0,8	—0,5	—0,9	—0,9	—0,2
9	+0,6	—2,0	—1,6	—0,9	—1,0	—0,2	—0,8	—0,8	—0,4	—0,3	—0,6
10	+0,5	—2,2	—0,6	+0,4	—0,8	—0,4	—0,3	—0,9	—1,1	—0,7	+0,4
11	+0,7	—1,0	+1,2	+0,4	—0,5	—0,5	—0,9	0	—0,4	—0,8	—0,3
12	+0,5	—2,1	—0,6	+0,7	+0,4	+1,0	+0,5	0	+0,5	+0,5	+0,6
13	+0,9	—1,3	—1,3	—0,6	+0,9	—0,5	—0,7	—0,5	—0,1	—0,4	—0,5
14	+0,3	—2,3	—0,3	+0,6	+0,1	—0,2	—0,4	—0,1	0	0	—1,0
15	+0,7	—1,2	—1,3	—0,5	—0,6	—1,3	—0,2	+0,2	+0,4	+0,4	—0,4
16	+0,6	—1,7	—0,7	—0,8	—0,4	—0,6	—0,9	—0,5	0	—0,3	—0,3
17	+0,6	—1,9	—1,6	—0,4	+0,1	+1,2	+0,8	+0,9	—0,6	—1,1	+1,0
18	+1,0	—1,7	—1,1	—0,2	+1,6	+0,8	+0,2	—0,1	—0,5	—0 8	—0,3
19	+0,7	—1,4	—0,8	—0,9	—1,2	—0,6	—0,4	—0,2	—0,8	—1,7	—1,6
20	+0 6	—0,3	+1,0	+0,2	—1,4	+0,5	+1,4	+1,0	—0,5	—0,8	—1,0
21	+0,4	—0,2	+0,9	+0,9	+0,8	+0,6	+0,6	—0,1	—0,4	+0,3	+0,2
22	+0,5	—0,6	+0,2	+0,3	+0,6	+0,4	+0,2	—0,2	—0,4	0	—0,4
23	+0,5	—1,6	—0,9	+0,7	+1,3	+0,5	—0,3	+0,4	0	+0,1	—0,6
$M[Y(t)]$	+0,6	—1,5	—0,5	+0,02	—0,03	—0,1	—0,1	—0,1	—0,3	—0,4	—0,3

* Г. В. Суходольский. О характеристиках человека при слежении. Автореферат канд. дисс. Изд. ЛГУ, 1968.

** Г. В. Суходольский. О характеристиках человека при слежении. Ук. соч.

Вычислив все условные средние арифметические $M[Y(t)]$, — они записаны в последней строке табл. 4.4.2 — случайную функцию центрируют по уравнению (4.4.3.). Центрированные значения ошибки слежения представлены в табл. 4.4.3.

Таблица 4.4.3

Центрированные реализации ошибки слежения

$M[\mathring{Y}(t)]$ — ошибка центрирования; $\sigma[Y(t)]$ — условные стандартные отклонения.

№, t	0,00	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
1	−0,3	−0,3	+0,1	−0,6	−0,8	−0,1	−0,5	−0,1	−0,1	−0,1	+0,1
2	+0,4	+1,0	+0,1	−1 4	−0,4	−0,5	−0,3	−1,4	+1,0	−0,1	−0,5
3	−0,3	+1,0	+1,7	+1,6	−0,6	−1,0	−0,1	+0,1	+0,3	+0,4	+0,3
4	+0,2	−0,5	+0,1	+1,1	+1,1	+0,3	+0,1	−0,2	0	−0,2	−0,4
5	0	−0,7	−0,7	+0,8	+0,3	−0,5	−0,3	+0,3	−0,6	−0,1	+0,3
6	−0,2	+0,2	−0,3	−0,3	0	−0,3	+0,6	+0,7	−0,3	−0,4	−0,3
7	−0,1	−0,7	+0,2	−0,2	−0,5	0	−0,2	−0,3	+0,4	−0,4	+0,1
8	−0,1	−1,5	−1,3	−0,4	+0,2	+0,9	−0,7	−0,4	−0,6	−0,5	+0,1
9	0	−0,5	−1,1	−0,9	−1,0	−0,1	−0,7	−0,7	−0,1	+0,1	−0,3
10	−0,1	−0,7	−0,1	+0,4	−0,8	−0,3	−0,2	−0,8	−0,8	−0,3	+0,7
11	+0,1	+0,5	+1,7	+0,4	−0,5	−0,4	−0,8	+0,1	−0,1	−0,4	0
12	−0,1	−0,6	−0,1	+0,7	+0,4	+1,1	+0,6	+0,1	+0,8	+0,9	+0,9
13	+0,3	+0,2	−0,8	−0,6	+0,9	−0,4	−0,6	−0,4	+0,2	0	−0,2
14	−0,3	−0,8	+0,2	+0,6	+0,1	−0,1	−0,3	0	+0,3	+0,4	−0,7
15	+0,1	+0,3	−0,8	−0,5	−0,6	−1,2	−0,1	+0,3	+0,7	+0,8	−0,1
16	0	−0,2	−0,2	−0,8	−0,4	−0,5	−0,8	−0,4	+0 3	+0,1	0
17	0	−0,4	−1,1	−0,4	+0,1	+1,3	+0,9	+1,0	−0,3	−0,7	+1,3
18	+0,4	−0,2	−0,6	−0,2	+1,6	+0,9	+0,3	0	−0,2	−0,4	0
19	+0,1	+0,1	−0,3	−0,9	−1,2	−0,5	−0,3	−0,1	−0,5	−1,3	−1,3
20	0	+1,2	+1,5	+0,2	−1,4	+0,6	+1,5	+1,1	−0,2	−0,4	−0,7
21	−0,2	+1,3	+1,4	+0,9	+0,8	+0,7	+0,7	0	−0,1	+0,7	+0,5
22	−0,1	+0,9	+0,7	+0,3	+0,6	+0,5	+0,3	−0,1	−0,1	+0,4	−0,1
23	−0,1	−0,1	−0,4	+0,7	+1,3	+0,6	−0,2	+0,5	+0,3	+0,5	−0,3
$M[\mathring{Y}(t)]$	−0,01	−0,02	0	+0,02	−0,03	+0,04	−0,05	−0,03	+0,01	−0,04	−0,03
$\sigma[Y(t)]$	0,20	0,74	0,88	0,76	0,82	0,68	0,60	0,56	0,46	0,53	0,56

Чтобы устранить появление грубых ошибок центрирования, обязательно вычисляют средние арифметические из центрированных значений случайной функции. Эти средние $M[\mathring{Y}(t)]$ представляют собой ошибку центрирования. Средний квадрат центрированных значений случайной функции есть ее условная дисперсия. Извлекая корни квадратные, получим оценки условных стандартных отклонений $\sigma[Y(t)]$ (табл. 4.4.3.).

Для вычисления корреляционной функции необходимо определить ковариации всех сочетаний по два из одиннадцати столбцов табл. 4.4.3. Результаты образуют ковариационную матрицу (табл. 4.4.4), в которой по главной диагонали расположены условные дисперсии. Нормируя элементы ковариационной матрицы произведениями соответствующих пар стандартных отклонений из табл. 4.4.3, получим матрицу коэффициентов корреляции

Таблица 4.4.4

Ковариационная матрица ошибки слежения

t, τ	0,00	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25
0,00	0,040	0,016	—0,029	—0,066	0,039	—0,001
0,25		0,542	0,272	—0,015	—0,045	—0,102
0,75			0,783	0,305	—0,149	—0,074
1,25				0,577	0,113	0,074
1,75					0,673	0,262
2,25						0,453
2,75						
3,25						
3,75						
4,25						
4,75						

Продолжение табл. 4.4.4

t, τ	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
0,00	—0,010	—0,032	0,008	—0,048	—0,044
0,25	0,169	0,059	0,089	0,079	—0,083
0,75	0,142	0,069	0,053	0,083	—0,040
1,25	0,128	0,149	—0,030	0,160	0,119
1,75	0,052	0,035	0,025	0,129	0,094
2,25	0,210	0,113	—0,036	—0,020	0,109
2,75	0 356	0,213	—0,022	0,014	0,067
3,25		0,313	—0,052	0,026	0,041
3,75			0,210	0,142	—0,015
4,25				0,276	0,075
4,75					0,313

(табл. 4.4.5). Заметим, что по каждой диагонали этой матрицы, параллельной главной диагонали, расположены значения коэффициентов корреляции, относящиеся к одному и тому же значению сдвига τ, но соответствующие разным началам отсчета.

По определению стационарности в широком смысле, корреляционная функция не должна зависеть от начала отсчета. Это значит, что все коэффициенты корреляции, лежащие на одной диагонали, должны быть равны по величине. Можно видеть, что в табл. 4.4.5 величины и даже знаки коэффициентов одной и той же диагонали различны для всех диагоналей. Это свидетельствует о нестационарности ошибки слежения. Аналогично M $[Y(t)]$ и $\sigma\,[Y(t)]$ в данном случае тоже нестационарны.

Корреляционная функция нестационарной случайной функции должна быть задана совокупностью своих значений для всех начал отсчета τ. Но для простоты аппроксимируем ее в рассматриваемом примере стационарной корреляционной функцией.

Таблица 4.4.5

Матрица коэффициентов корреляции

$\tilde{R}_{YY}(\tau)$ значения оценок нормированной корреляционной функции ошибок слежения; t — начало отсчета; τ — сдвиг аргумента.

t, τ	0,00	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
0,00	1,00	0,16	—0,16	—0,43	0,24	—0,01	—0,08	—0,30	0,08	—0,45	—0,39
0,25		1,00	0,42	—0,03	—0,07	—0,20	0,38	0,14	0,27	0,20	—0,20
0,75			1,00	0,46	—0,21	—0,12	0,27	0,14	0,13	0,18	—0,08
1,25				1,00	0,18	0,14	0,28	0,35	—0,09	0,40	0,28
1,75					1,00	0,47	0,11	0,08	0,07	0,30	0,20
2,25						1,00	0,51	0,30	—0,12	—0,06	0,29
2,75							1,00	0,63	—0,08	0,04	0,20
3,25								1,00	—0,20	0,09	0,13
3,75									1,00	0,58	—0,06
4,25										1,00	0,25
4,75											1,00
$\tilde{R}_{YY}(\tau)$	1,00	0,35	0,01	—0,03	0,12	0,17	0,14	0,07	0,07	—0,32	—0,39

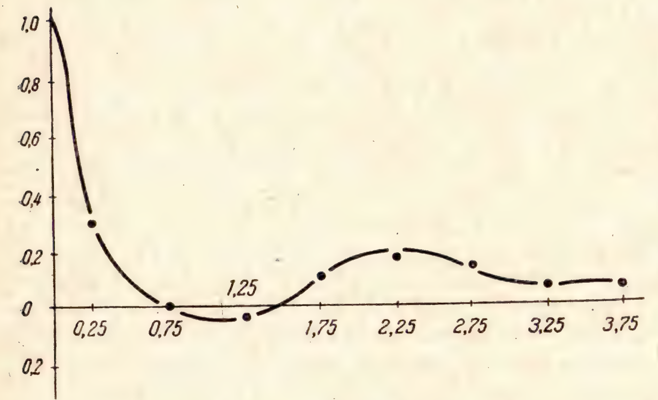


Рис. 4.4.3. Нормированная корреляционная функция стационарного процесса, аппроксимирующего ошибку слежения. По оси ординат $\tilde{R}_{YY}(\tau)$, по оси абсцисс — сдвиг τ, *сек*.

Стационарную аппроксимацию нормированной корреляционной функции получим, усредняя коэффициенты по диагоналям и сопоставляя полученные средние значения координатам τ:

$$\tilde{R}_{YY}(\tau_i) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{K_{YY}(t, t+\tau)}{\sigma_Y(t)\cdot\sigma_Y(t+\tau)},$$

где k — количество усредняемых коэффициентов убывает от одиннадцати (при $\tau_1 = 0$ сек) до одного (при $\tau_{11} = 4{,}75$ *сек*). Так как при усреднении допускается некоторая ошибка, величина которой тем больше, чем меньше k, точность оценки значений

$\check{R}_{YY}(\tau)$ уменьшается с ростом τ. В частности, значения $\check{R}_{YY}(\tau)$ при всех $\tau > 1{,}75$ *сек* сомнительны. Однако для демонстрации проанализируем полученную нормированную автокорреляционную функцию, показанную на рис. 4.4.3.

Можно видеть, что функция $\check{R}_{YY}(\tau)$ затухает, колеблясь вокруг горизонтали, параллельной оси τ. Это обстоятельство всегда свидетельствует о наличии ошибок центрирования и вычислений (они, однако, не влияют на свойства полученной кривой). Периоды колебаний функции $\check{R}_{YY}(\tau)$, судя по рис. 4.4.3, приблизительно равны 1 *сек*. Это свидетельствует о наличии периодической компоненты в ошибке слежения, с основной частотой, равной приблизительно 1 колебанию в секунду. Наконец, можно видеть, что при $\tau \approx 0{,}5$ *сек* функция пересекает асимптоту; значит, интервал корреляции составляет около $0{,}5$ *сек*.

Глава 5

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§ 5.1. ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

5.1.1. Генеральная совокупность и выборка

Из-за массовости случайных явлений, выступающих объектами научных исследований, приходится отличать то́, что должно быть изучено, от того, что реально может быть изучено и изучается. Например, если должна быть изучена степень возможности появления некоторого случайного события, то необходимо рассмотреть бесконечно большое число испытаний, в части которых могло бы появиться это событие, и определить его вероятность. Это, однако, невозможно практически; приходится ограничиться частостью как оценкой для вероятности, определяемой при некотором конечном числе испытаний. В этой связи в математической статистике выделяются два фундаментальных понятия: (*генеральная*) *совокупность* как то, что подлежит изучению, и *выборка* — как то, что реально изучается. Очевидно, что выборка должна адекватно *отображать* генеральную совокупность, иначе результаты не совпадут с целями исследования. Тому, что это означает, в сущности, и посвящена математическая статистика как наука.

Совокупность и выборку можно рассматривать содержательно и формально по-разному, причем формальное рассмотрение важно с точки зрения применяемого описательного аппарата теории вероятностей, а содержательное — еще и с точки зрения организации исследования. Поскольку понятие совокупности является исходным, начнем с него.

Совокупностью будем называть практически счетное * множество некоторых объектов (элементов), интересующих исследователя. Понятно, что, определяя эти объекты содержательно (психические свойства, состояния, процессы и т. д.) или формально (события, величины, функции и т. д.), мы так же определяем и всю совокупность. *Свойством* совокупности будем называть реальное или воображаемое качество, присущее некоторым или всем ее элементам. *Параметром* совокупности будем называть свойство, которое можно квантифицировать в виде константы

* Часто для удобства в теории рассматриваются несчетные множества, например, бесконечно большое число испытаний.

или переменной величины. * Свойство или параметр могут быть случайными и не случайными. Соответственно, совокупности рассматриваются как стохастические и детерминированные.

Простой (одномерной) совокупностью назовем ту, которая характеризуется:

— отдельным свойством, например, все негры США;
— отдельным параметром в виде константы или переменной, например, все ленинградцы среднего роста, или рост ленинградцев;
— системой непересекающихся (несовместных) свойств, например, все студенты и преподаватели ЛГУ.

Сложной (многомерной) совокупностью назовем ту, которая характеризуется:

— системой хотя бы частично пересекающихся свойств, например, студенты физического и психологического факультетов ЛГУ, мужского и женского пола, окончившие школу с медалями;
— системой параметров, независимых (частично зависимых) и зависимых в совокупности; примером может служить система параметров, изучаемая в комплексном исследовании личности**.

Гомогенной (однородной) назовем совокупность, все характеристики которой присущи каждому ее элементу (т. е. распределены по всей совокупности одинаковым образом).

Гетерогенной (неоднородной) назовем совокупность, характеристики которой сосредоточены в отдельных подмножествах элементов, так что гетерогенную совокупность можно рассматривать как объединение гомогенных подсовокупностей.

Все стохастические простые и сложные совокупности могут быть гомогенными; гетерогенными — почти все, за исключением простой, характеризуемой отдельным свойством или параметром в виде константы.

Неполная классификация совокупностей в пояснение изложенной систематики приведена на рис. 5.1.1. Можно полагать, что для психологической теории и практики наибольший интерес представляют стохастические многомерные гетерогенные совокупности, характеризуемые системой (или даже — системами) параметров и свойств.

Параметром, важнейшим с точки зрения возможностей исследования, является *объем* совокупности — количество образующих ее элементов. Величина объема часто зависит от того, как определена сама совокупность. Мы уже встречались с этим вопросом в главе 1, рассматривая число исходов опыта и полную группу событий. Действительно, если, например, нас интересует эмоциональное состояние конкретного студента 1-го курса в период сдачи конкретного зачета в зимнюю сессию, то генеральная

---

* Свойство является «вырожденным» параметром, так как оно квантифицируется в двоичной системе счисления.

** Б. Г. Ананьев. Человек как предмет познания. Л., 1969; Б. Г. Ананьев, А. С. Пашков. Комплексное исследование социальных проблем. В сб.: Человек и общество, вып. VIII. Л., 1971.

совокупность исчерпывается дискретным числом оценок эмоционального состояния данного студента, полученных в течение получаса. Иной объем будет иметь совокупность эмоциональных

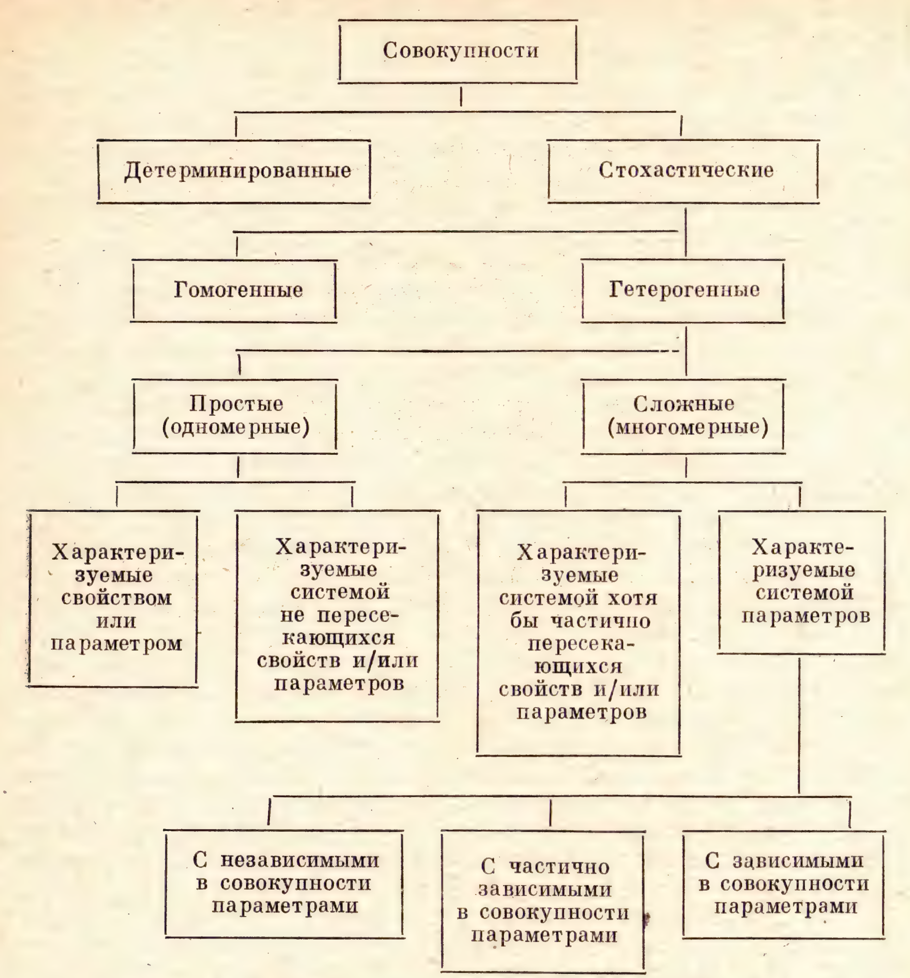


Рис. 5.1.1. Классификация генеральных совокупностей.
Для гомогенных совокупностей в математической статистике рассматриваются почти все те же виды, что приведены для гетерогенных совокупностей.

состояний всех студентов 1-го курса, еще больший — совокупность для студентов всех 1-х курсов данного вуза; еще больший, — при условии нескольких зачетов и экзаменов и т. д. Если совокупность из одного студента можно изучить с рассматриваемой точки зрения досконально, то совокупность из студентов всех 1-х курсов, не ограничивая годы изучения, исследовать уже не представляется

возможным. Понятно, что общая и социальная психология по сравнению с другими психологическими отраслями преимущественно занимаются совокупностями очень большого, хотя и конечного объема, исследовать которые иначе, чем выборочным путем нельзя.

Выборкой будем называть некоторую часть генеральной совокупности. Принято классифицировать выборки по репрезентативности, по объему, по способу отбора и по схеме испытаний. *Репрезентативной* (представительной) называется выборка, адекватно отображающая генеральную совокупность в качественном и количественном отношениях. Что это конкретно означает, можно будет объяснить лишь в дальнейшем изложении. Однако заметим, что репрезентативность выборки непосредственно зависит от ее объема. Априори ясно: чем ближе объем выборки к объему совокупности, тем репрезентативнее выборка. Способы отбора и схемы испытаний, в сущности, лишь обусловливают возможность получить репрезентативную выборку при ограниченном объеме.

По способу отбора выделяют: случайную и неслучайную (механическую, типическую, серийную и комбинированную) выборки.

Выборка называется *случайной*, если элементы генеральной совокупности отбираются случайным образом. Под этим обычно понимают равные шансы для каждого элемента быть выбранным. Альтернативой случайной выборки является выборка, отбор в которую тенденциозен. Так как большинство методов математической статистики основывается на понятии случайной выборки, остановимся на нем подробнее.

Рассматривая нормальное распределение (стр. 133), мы отмечали, что случайная величина имеет нормальное распределение при условии, что на нее действует большое число случайных факторов, равных по силе воздействия. Мы также указывали, что при $n > 20$ и $p \approx q$ биномиальное распределение практически не отличается от нормального (стр. 161). Тот факт, что композиция нормально распределенных аргументов имеет нормальное распределение (стр. 234), может быть обобщен и на композиции распределений аргументов, отличных от нормального, при условии большого числа равнодействующих случайных аргументов. Указанные обстоятельства и составляют существо так называемого закона больших чисел, на котором основываются все представления об ошибках оценивания свойств и параметров генеральной совокупности по выборке. В этой связи, очевидно, выборка должна быть случайной уже потому, что иначе нельзя правильно использовать разработанные в теории математической статистики приемы и методы оценивания. С другой стороны, выборка должна быть случайной для того, чтобы преднамеренно или нечаянно не исказить «истинных» характеристик генеральной совокупности тенденциозным отбором элементов в выборку.

Считается, что любые неравные шансы для элементов попасть в выборку приводят к тенденциозному, неслучайному отбору.

Существует немало методов организации случайного отбора. Не разбирая их подробно, * укажем на основной — это произвольная нумерация элементов из генеральной совокупности, а затем выбор по таблицам равновероятных случайных чисел.

Заметим, что в психологических исследованиях редко заботятся о случайном отборе испытуемых, хотя внешние стимульные воздействия организуются в случайном порядке. Понятно, что благодаря этому полученные экспериментальные оценки изучаемых явлений менее адекватны популяции homo sapiens, чем при случайной выборке испытуемых. Поясним сказанное следующим образом. Пусть изучение некоторой психической переменной осуществляется на группе испытуемых-студентов. Даже если эта группа представляет собой случайную выборку из совокупности студентов данного вуза, она является не случайной, а тенденциозной, например, относительно всех жителей данного города, имеющих тот же возраст, уже потому, что на психические переменные не может не влиять уровень образования, а студенты — люди высокообразованные. Поэтому данные, полученные на студентах, строго говоря, справедливы лишь для студентов. Эти очевидные вещи приводят к нетривиальному для математической статистики выводу: случайная выборка, как она обычно понимается, применима безоговорочно лишь для гомогенных совокупностей. Как же изучать выборочным путем гетерогенные совокупности?

Очевидна необходимость репрезентативно отобразить в выборке структурные (качественные и количественные) характеристики гетерогенной совокупности. Столь же очевидно, что этого можно достичь средствами случайного отбора лишь при условии, что объем случайной выборки приближается к объему генеральной совокупности. Поскольку выборка такого объема столь же нереальна, как и изучение всей генеральной совокупности, возникает парадоксальная необходимость использовать неслучайную выборку.

Неслучайный отбор может быть механическим, типическим, серийным и комбинированным. Все эти виды, в сущности, сочетают тенденциозный и случайный отбор.

При *механическом* отборе вся совокупность делится на столько частей, сколько единиц планируется в объеме выборки, после чего случайным образом из каждой части отбирается один элемент, включаемый в выборку. При *типическом* отборе совокупность делится на гомогенные части, после чего из каждой части осуществляется случайная выборка. При *серийном* отборе генеральную совокупность делят на большое число равновеликих серий, после чего случайную выборку делают не из единиц, а из серий совокуп-

---

* Рассмотрение собственно выборочных методов можно провести лишь в контексте методов планирования эксперимента. Но современное планирование экспериментов далеко выходит за рамки математической статистики и требует особого рассмотрения.

ности, причем серии, попавшие в выборку, изучаются сплошь. При *комбинированном* отборе сочетаются на разных этапах уже рассмотренные виды отбора. Одной из разновидностей комбинированного отбора является двухступенчатый отбор, при котором на первой ступени осуществляется серийный отбор, а на второй — из каждой серии, попавшей в случайную выборку серий, выполняется случайная выборка элементов. Другая разновидность комбинированного отбора состоит в следующем. При отсутствии достоверной априорной информации любая совокупность считается гомогенной и из нее на первом этапе случайным образом делается выборка большого объема, по которой апостериори выявляется гетерогенный характер совокупности и определяется многомерное распределение вероятностей ее гомогенных частей. На втором этапе, уже на основе апостериорной информации о типических характеристиках совокупности, осуществляется типический отбор, и в результате нового выборочного исследования уточняются сведения о генеральной совокупности. Далее могут следовать третий и другие этапы с повторными уточняющими типическими выборками.

По схеме испытаний выборки делятся на независимые (повторные, простые) и зависимые (бесповторные, сложные). Суть этого разделения в том, чтобы вероятностные характеристики генеральной совокупности не изменялись под бесцеремонными воздействиями исследователя. Простая выборка образуется по схеме независимых испытаний (стр. 30), т. е. элементы, вошедшие в выборку, возвращаются обратно в генеральную совокупность, благодаря чему безусловная вероятность каждому элементу быть избранным не меняется в процессе отбора. При бесповторной выборке элементы, однажды выбранные, уже не могут выбираться снова: они исключаются. Таким путем по ходу отбора объем совокупности уменьшается и состав ее изменяется, так что условные вероятности быть выбранными для оставшихся элементов все время увеличиваются. В свою очередь это означает, что элементы выборки оказываются зависимыми, причем эта фиктивная зависимость должна быть учтена, иначе ее можно ошибочно приписать самой генеральной совокупности. Понятно, что, чем больше объем исходной совокупности, тем меньше различия между простой и бесповторной выборками.

По объему принято выделять малые и большие выборки. Малыми считают выборки, объем которых $n \leqslant 30$. Понятие большой выборки не определено. Рассматривая массивы данных, полученных при изучении двумерной системы (стр. 198), мы выделили три класса объемов выборок, основываясь на возможности сгруппировать данные и оценить распределения величин в системе, а также определить значения всех или только некоторых числовых характеристик. При таком практически полезном подходе малая выборка имеет объем $n < 30$, средняя $30 \leqslant n \leqslant 200$ и большая $n > 200$. Конечно, это деление весьма условно. Наивно было бы

судить о неизвестных свойствах совокупности по выборке малого объема. Поэтому малые выборки используются при статистическом контроле известных свойств изученных совокупностей. Большие выборки, наоборот, используются как раз для установления неизвестных свойств и параметров совокупности. Однако, что́ считать здесь большим, зависит от этих свойств и параметров. Во избежание порочного круга вводится понятие достаточного объема выборки, которое мы рассмотрим в § 5.3.

5.1.2. **Количественные характеристики генеральной совокупности и выборки**

Цель выборки исчерпывается получением сведений о генеральной совокупности. Поэтому совокупность и выборка должны содержательно и формально характеризоваться на качественном уровне одними и теми же свойствами, параметрами и их системами, а на количественном уровне — одними и теми же числовыми и функциональными мерами. В этой связи можно подвести итоги основным средствам формального описания случайных явлений, рассмотренным в предыдущих главах, разделяя все количественные характеристики совокупностей и выборок на две группы: параметрические (числовые) и непараметрические (функциональные), а затем классифицируя их, как показано на рис. 5.1.2 и 5.1.3.

С формальной точки зрения различия между выборкой и генеральной совокупностью могут состоять в следующем.

1. Выборка есть система с меньшим числом описывающих факторов (событий, величин, функций), чем генеральная совокупность, — такая выборка нерепрезентативна (или малорепрезентативна).

2. Функциональные характеристики выборки отличаются от соответствующих характеристик в генеральной совокупности. В зависимости от степени (приемлемости) отличий оценивается репрезентативность выборки.

3. Параметры выборки отличаются от параметров генеральной совокупности, причем степень отличия (приемлемая или нет) выражает репрезентативность выборки. Так как многие функциональные характеристики могут быть определены через параметры, оценивание параметров генеральной совокупности посредством параметров выборки наиболее распространено.

Нетрудно понять, что все указанные различия в конечном счете по степени находятся в обратной зависимости от объема выборки. Действительно, на рис. 1.1.1 было показано, как изменяются средние значения частости появления цифры «7» от выборки к выборке (объемом $n = 50$). На рис. 1.1.2 можно видеть, что размах, характеризующий рассеивание выборочных средних, уменьшается при увеличении n. В общем случае при небольших n от выборки к выборке меняется и форма распределения случайных

18 Г. В. Суходольский

Параметрические (числовые), характеристики

- Меры возможности
  - Простых событий, значений величины
    - $P(A)$
    - $P(X+\lambda_x)$
  - Сложных событий, значений величин
    - $P\left(\prod_i A_i\right)$, $P\left(\prod_i X_i\right)$
    - $P\left(\sum_i A_i\right)$, $P(X<x)$
- Меры положения
  - Вероятностные
    - Мо
    - Квантили x_α, Ме, Q_1, Q_3
  - Степенные H, G, M, S, Θ, Q
- Меры связи
  - Сопряженности событий и величин
    - Тетрахорические Q, Φ
    - Общие C, K, K_N
    - Ранговой корреляции ρ, τ, $\bar{\rho}$, W
  - Корреляции величин
    - Линейной
      - Простой COV_{XY}, r^2_{XY}, r_{XY}, $a_{Y/X}$, $a_{X/Y}$
      - Множественной COV_{ij}, r^2_{ij}, r_{ij}, $R^2_{i.23\ldots N}$, $r_{ij\ldots K}$, $R_{i.23\ldots N}$, $\bar{R}_{i.23\ldots N}$
    - Нелинейной
      - Простой $\eta^2_{Y/X}$, $\eta^2_{X/Y}$, $\eta_{Y/X}$, $\eta_{X/Y}$
      - Множественной $\eta^2_{i.23\ldots N}$, $\eta_{i.23\ldots N}$, $\bar{\eta}_{i.23\ldots N}$
- Меры рассеивания
  - Стандартные D, σ, V
  - Нестандартные d, δ, $E(Q)$
  - Меры асимметрии и эксцесса
    - $\mathrm{As}(Q)$, As, Ex

Рис. 5.1.2. Классификация параметрических характеристик совокупностей и выборок.

переменных. Так что, например, из нормально распределенной совокупности можно при малом n получить выборочные распределения любой произвольной формы.

Возвращаясь еще раз к определению частости как отношению частоты (f) к числу наблюдений (n), подчеркнем ее смысл. Частость означает, что событие (число) в массе серий (выборок) по n испытаний в *среднем* встречается f раз. Это, следовательно, не исключает того, что оно вообще не встретится или встретится



Рис. 5.1.3. Классификация непараметрических характеристик совокупностей и выборок.

все n раз: $0 \leqslant f \leqslant n$, как следует из определения частости и биномиального закона распределения. Но тогда очевидно, что редкие события можно наблюдать при большом n, так как они лишь случайно могут появиться в выборке с малым n. Наоборот, в малой выборке преимущественно появляются частые события.

Теперь представим себе, что объем генеральной совокупности N позволяет сделать большое число (R) случайных выборок малого объема n_i ($N \gg n_i$, $i = 1, 2, \ldots, R$). Будем «вычерпывать» объем N выборками объема n_i, тогда при зависимых испытаниях

$N = \sum_{i=1}^{R} n_i$. Если допустить, что изучаемый параметр в генеральной совокупности распределен нормально, тогда, при условии случайного отбора, очевидно, что с вероятностью 0,683 примерно две трети всех выборок охватят лишь значения неизвестного параметра θ в пределах $\theta \pm \sigma_\theta$ и лишь 0,046 всех выборок охватят значения параметра в пределах $\theta < -2\sigma_\theta$ и $\theta > 2\sigma_\theta$. Отсюда следует практически важный вывод. Функцию распределения параметра в генеральной совокупности можно получить двумя путями: 1) композицией многих случайных выборок малого объема, а потому в отдельности нерепрезентативных; 2) отображением одной большой случайной выборкой, объем которой достаточен для ее репрезентативности. В этой связи подчеркнем два обстоятельства.

1. Случайная выборка обеспечивает равновероятный выбор из разных подобластей области определения параметра в генеральной совокупности, тогда как неслучайная выборка может сместить выбор преимущественно в одну из подобластей, исказив тем самым результаты исследования так, что это искажение будет трудно или невозможно учесть и скорректировать.

2. Две (или несколько) случайных выборок малого объема, взятые из однородной совокупности, в свою очередь, однородны; но взятые из неоднородной совокупности могут быть однородными или неоднородными в том смысле, что одинаковым или, соответственно, неодинаковым образом отображают гетерогенную совокупность. Поэтому однородность двух (и более) выборок свидетельствует в пользу того, что они относятся к одной и той же генеральной совокупности, а неоднородность свидетельствует только о том, что эти выборки не из однородной совокупности.

5.1.3. Погрешности статистических оценок

Параметрические характеристики выборки принято называть *оценками* в отличие от параметрических характеристик совокупности, которые называются *параметрами*. Таким образом, среднее арифметическое значение выборки есть оценка среднего арифметического значения генеральной совокупности; частость (эмпирическая вероятность) — это оценка вероятности, и т. д. Понятно, что величина оценки может отличаться от величины параметра во всех случаях, если объем выборки меньше объема совокупности. При этом в силу случайности отбора элементов в выборку любая оценка является случайной величиной. Действительно, пусть имеется большое число R выборок фиксированного объема n_i ($i = 1, 2, \ldots, R$), в каждой из которых определена оценка t_i некоторого параметра θ генеральной совокупности. Флюктуируя от выборки к выборке, значения t_i распределяются в некоторой области возможных значений $t_{\min} \leqslant \theta \leqslant t_{\max}$ с вероятностями $P(\theta \leqslant t_i)$, совокупность которых образует функцию

распределения $F(t)$ произвольного вида. Если θ — величина непрерывная, то существует и плотность вероятности $f(t) = \frac{1}{\lambda_i} \cdot P(t_i \leq \theta \leq t_i + \lambda_t)$, где $P\ (t_i \leq \theta \leq t_i + \lambda_i)$ — вероятности параметру θ быть оцененным по выборке значениями t_i на интервале квантования λ_i. Таким образом, оценка t_i некоторого параметра θ является «полноправной» случайной величиной и описывается уже рассмотренным аппаратом качественных свойств и количественных характеристик.

Для распределений оценок принято учитывать свойства положения, рассеивания, асимметрии, а также связи (в случае выборки по схеме зависимых испытаний). При этом используются соответствующие меры, в частности, среднее арифметическое значение оценки как мера ее положения, дисперсия и стандартное отклонение оценки как меры ее рассеивания.

С учетом этих свойств распределения выборочной оценки обычно выделяют два вида оценивания: точечное и интервальное (доверительное). *Точечное* оценивание основывается на учете положения, рассеивания, а также асимметрии распределения оценки. Мерой здесь служит *математическое ожидание* параметра θ, определяемое для конечных по объему совокупностей как среднее арифметическое из оценок t_i: $\mathrm{M}[\theta] = \sum_{i=1}^{R} t_i \cdot P(t_i \leq \theta \leq t_i + \lambda_t)$ и для $R \to \infty$: $\mathrm{M}[\theta] = \int_1^{\infty} t \cdot f(t)\, dt$. Таким образом, математическое ожидание параметра есть среднее арифметическое из оценок, которые, в свою очередь, являются выборочными средними из значений параметра, т. е. это средние из средних.

В предыдущих главах мы рассматривали значительное число разных мер положения, рассеивания и т. д. (см. рис. 5.1.2).

Какие же из этих мер более всего подходят для оценки соответствующих параметров совокупности? Выбор оценки должен базироваться на совокупности трех критериев, предложенных Р. А. Фишером. С позиции этих критериев оценкам приписываются свойства состоятельности и эффективности, несмещенности и достаточности.

Оценка t является *состоятельной* (или подходящей) для параметра θ, если $\lim_{n \to N} t = \theta$, где n — объем выборки, а N — объем совокупности. Иначе говоря, при $n \to N$, вероятность различия $t - \theta$ стремится к нулю, если t — состоятельная оценка θ.

Большинство из рассмотренных нами оценок являются состоятельными. Поэтому, чтобы выбрать из них наилучшую, учитывают дисперсию $\mathrm{D}(t)$. *Эффективной* называется оценка, у которой наименьшая дисперсия. Степень эффективности оценивают дисперсионным отношением: $F = \mathrm{D}_б(t) : \mathrm{D}_м(t)$, где $\mathrm{D}_б(t)$ — бóльшая и $\mathrm{D}_м(t)$ — меньшая по величине дисперсии оценки. Чем больше

отличается F от единицы, тем эффективнее оценка t, имеющая D (t) *. Оценка должна быть *несмещенной*, это означает, что $M[t] = \theta$ — математическое ожидание выборочной оценки равно значению параметра в генеральной совокупности. Здесь еще раз отметим, что несмещенность оценок обеспечивается, во-первых, симметричностью их распределений, а во-вторых, случайным отбором. Оценка, наконец, должна быть *достаточной* в том смысле, что никакая другая оценка не дает дополнительной информации об изучаемом параметре.

Представление об указанных свойствах для некоторых мер (из числа рассмотренных нами) при их использовании в качестве оценок можно получить из табл. 5.1.1. В этой связи принято считать, что наилучшей (в смысле выполнения критериев) оценкой

Таблица 5.1.1

Свойства точечных оценок

Оценка	Состоятельная	Эффективная	Несмещенная	Достаточная
Частость (p)	Да	Да	Да	Да
Мода (M_0)	Да	Нет	Да	Нет
Медиана (Me)	Да	Нет	Да	Нет
Среднее арифметическое (M)	Да	Да	Да	Да
Дисперсия (D)	Да	Да	Нет	Да
Стандартное отклонение (σ)	Да	Да	Нет	Да
Коэффициент сопряженности Чупрова (K)	Да	Да	Да	Да
Коэффициент корреляции Бравэ-Пирсона (r_{ij})	Да	Да	Нет	Нет

положения является среднее арифметическое. Оценки рассеивания и связи уже удовлетворяют лишь части критериев. Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности является величина $s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D$, где D — выборочная дисперсия, n — объем выборки, s — оценка стандартного отклонения. Заметим, что s^2 — не является выборочной дисперсией. Это просто случайная величина, служащая несмещенной оценкой генеральной дисперсии, но смещающая выборочную дисперсию на величину $n : (n - 1)$. Легко понять, что с увеличением n отношение $n : (n - 1)$ быстро сходится к единице, и s^2 — сходится к $\sigma^2 = D$. Наиболее распространенная линейная мера корреляции — коэффициент Бравэ—Пирсона r_{ij} является смещенной оценкой, причем смещение

* Более подробно дисперсионное отношение F будет рассмотрено в § 5.2.

увеличивается с увеличением модуля значения $|r_{ij}|$, как видно из рис. 5.1.4. В этой связи в качестве несмещенной оценки используется предложенное Р. А. Фишером z-преобразование

$$z_{ij} = 0{,}5 \ln \frac{1+r_{ij}}{1-r_{ij}}, \tag{5.1.4}$$

где ln — натуральные логарифмы, а z_{ij} — определяется для r_{ij} по табл. III Приложения 2.

Для построения оценок, удовлетворяющих указанным выше критериям, Р. А. Фишер разработал статистический метод точечного оценивания — это метод максимального правдоподобия, который мы рассмотрим в § 5.3.

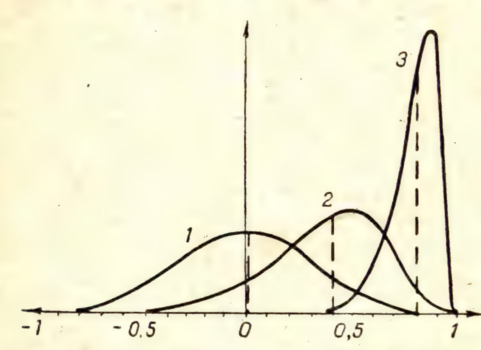


Рис. 5.1.4. Распределение выборочной оценки (r) коэффициента линейной корреляции ($\tilde{r}$), при объеме коррелируемых выборок $n_j = 12$.

По оси ординат — n_j, по оси абсцисс — r; 1 — $\tilde{r} = 0$; 2 — $\tilde{r} = 0{,}4$; 3 — $\tilde{r} = 0{,}8$.

Интервальное (доверительное) оценивание базируется на учете рассеивания, преимущественно симметричного. Существо этого способа оценивания состоит в том, чтобы указать *доверительный интервал*:

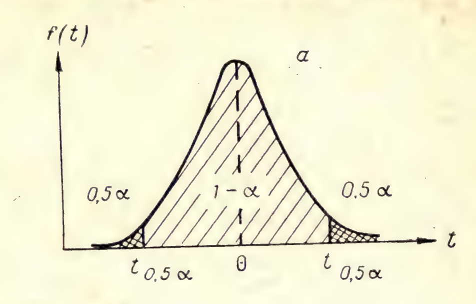
$$t_i - t_\alpha \cdot \sigma(\theta) \leqslant \theta \leqslant t_i + t_\alpha \cdot \sigma(\theta), \tag{5.1.5}$$

в котором θ — значение искомого параметра заключено с доверительной вероятностью $1 - \alpha$, если $\sigma(\theta)$ — стандартное отклонение параметра, и t_α — квантиль распределения параметра, отсекающий слева и справа долю вероятности, равную α. Обычно принимают $\alpha = 0{,}05$; $0{,}01$; реже $\alpha = 0{,}10$ и $0{,}001$. Смысл интервального оценивания параметра (на примере арифметического среднего) поясняется на рис. 5.1.5.

На основе интервальных оценок параметров, образующих функциональную характеристику, осуществляется оценивание доверительной области и для функциональной характеристики совокупности. Наиболее распространено построение доверительной области для простой регрессии (рис. 5.2.5), что будет рассмотрено ниже.

Для изучения интервальных оценок необходимо уметь вычислить $\sigma(\theta)$ — стандартные отклонения параметров, которые принято называть *стандартными ошибками* (погрешностями) выборочных оценок параметров. Определение этих ошибок зависит от многих факторов, но прежде всего от объема выборки. Сводка формул для оценки стандартных погрешностей многих параметрических характеристик представлена в табл. 5.1.2. Там же даны

соответствующие разъяснения. Дополнительно заметим, что, строго говоря, применение стандартных погрешностей законно лишь тогда, когда распределение статистик сходится к нормальному закону. Но это выполняется для разных статистик с различной скоростью.



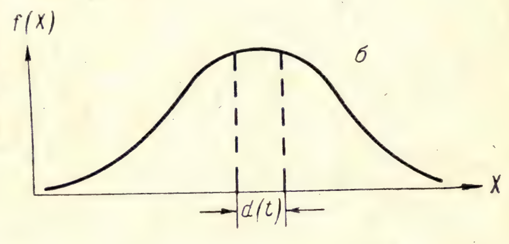


Рис. 5.1.5. Пояснение интервального оценивания.

а — плотность выборочного распределения оценок t_i параметра θ в стандартном масштабе: $t = \frac{t_i - \theta}{\sigma(\theta)}$, где $\sigma(\theta) = \sqrt{D(X) : n}$, $1 - \alpha$ — доверительная вероятность, $t_{0,5\alpha}$ — квантили распределения $f(t)$, θ — математическое ожидание параметра в совокупности, $D(X)$ — выборочная дисперсия, n — объем выборки; *б* — плотность распределения изучаемой случайной величины X, параметр которой оценивается (в данном случае — это среднее арифметическое значение); $\theta = M(X)$; $d(t)$ — доверительный интервал (5.1.5) в стандартном масштабе: $d(t) = t_i \pm t_\alpha\, \sigma(\theta)$.

5.1.4. Надежность статистических оценок

В отличие от обычного предположения научная гипотеза является предположением, допускающим практическую проверку хотя бы в будущем. Статистическая гипотеза — это научная гипотеза, допускающая статистическую проверку. Под статистической гипотезой обычно понимают формальное предположение о том, что сходство (или различие) некоторых параметрических или функциональных характеристик случайно (или, наоборот, неслучайно). Поэтому содержательные предположения по поводу исследуемых явлений должны быть переформулированы определенным образом. Например, изучается влияние на время реакции (u) фактора z. Пусть имеются две серии опытов: экспериментальная, где $z \neq 0$, и контрольная, где $z = 0$. Обычная научная гипотеза в такой ситуации гласит: фактор z влияет (или не влияет) на время реакции. Статистическая гипотеза формулируется иначе: безусловное распределение времени реакции $F(u)$ неслучайно (или случайно) отличается от условного распределения $F(u/z)$. В дальнейшем изложении будут приведены и другие формулировки статистических гипотез.

Проверка статистической гипотезы состоит в том, чтобы определить вероятность случайности или неслучайности различий (или сходства). При этом гипотеза о случайности (все равно различия

Таблица 5.1.2

Стандартные погрешности статистического оценивания параметров

n — везде объем выборки

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
	Для параметров возможности	
Вероятность события (значения величины): $P(A)$; $P(A/B)$; $P(X=x)$; $P(X<x)$	$\sigma(P)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{n}P(1-P)}, \\ \sqrt{\frac{1}{n}F(x)[1-F(x)]}\end{cases}$	Для вероятностей событий, для функций распределения
Плотность вероятности $f(x)$	$\sigma[f(x)]=\sqrt{\left[\frac{f''(x)}{24f(x)}\lambda_x\right]^2+\frac{1}{n\cdot\lambda_x\cdot f(x)}}$	Для плотностей распределения
	Для параметров положения	
Медиана Me	$\sigma(\mathrm{Me})=\begin{cases}\frac{0,5}{\sqrt{n}}y_0, \\ \frac{1,2533}{\sqrt{n}}\sigma\end{cases}$	y_0 — ордината плотности, соответствующая медиане, σ — стандартное отклонение нормально распределенной генеральной совокупности
Квартиль Q_i $(i=1,\ 3)$	$\sigma(Q_i)=\begin{cases}4y_0\sqrt{\frac{3}{n}}, \\ \frac{1,3626}{\sqrt{n}}\sigma\end{cases}$	То же
Начальный момент k-той степени m_k	$\sigma(m_k)=\sqrt{\frac{1}{n}(m_{2k}-m_k^2)}$	В любых условиях

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Среднее арифметическое значение $M(X)$	$\sigma[M(X)] = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$	$\sigma(X)$ — стандартное отклонение в генеральной совокупности. Если оно не известно, то заменяется выборочной оценкой $S(X)$
Разность двух средних арифметических значений $M(X_1)$ и $M(X_2)$	$\sigma\{\lvert M(X_1)-M(X_2)\rvert\} = \sqrt{\frac{\sigma^2(X_1)}{n_1}+\frac{\sigma^2(X_2)}{n_2}}$	n_1 — для выборки X_1 и n_2 — для выборки X_2; $\sigma(X_1)$ и $\sigma(X_2)$ — «генеральные» стандартные отклонения
То же	$s\{\lvert M(X_1)-M(X_2)\rvert\} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}[x_i-M(X_1)]^2+\sum_{j=1}^{n_2}[x_j-M(X_2)]^2}{n_1+n_2-2}\cdot\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}$	Если $\sigma(X_1)$ и $\sigma(X_2)$ не известны

Для параметров рассеивания

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Размах распределения d	$\sigma(d) = \sqrt{\frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)^2}}$	Без ограничений
Сумма абсолютных отклонений $n\delta_x = \sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - M(X)\rvert$	$\sigma(n\delta_x) = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$	$\pi \approx 3,14$; $\sigma(n\delta_x)$ — так называемый коэффициент Питера
Среднее арифметическое отклонение δ_x	$\sigma(\delta_x) = \sigma(x)\sqrt{\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}$	Для нормального распределения с «генеральным» стандартом $\sigma(x)$

Продолжение табл. 5.1.2

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Дисперсия D	$\sigma(\mathrm{D})=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{n}(\mu_4-\mu_2^2)}, \\ D\sqrt{\frac{2}{n}}\end{cases}$	Для любого, для нормального распределения
Стандартное отклонение $\sigma(X)$	$\sigma[\sigma(X)]=0{,}5\cdot\sqrt{\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\mu_2}}$	В любом случае
	$\sigma[\sigma(X)]\cong\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$	Приближенно — в случае асимптотически нормального распределения, точно — для нормального
Разность двух выборочных дисперсий $\lvert S_1^2-S_2^2\rvert$	$\sigma(\lvert S_1^2-S_2^2\rvert)=\begin{cases}2S_1S_2\sqrt{\frac{1-r_{12}^2}{n-2}}, \\ \frac{2S_1S_2}{\sqrt{n-2}}, \\ 2S_1S_2\sqrt{\frac{n_1+n_2}{(n_1+n_2-2)\,n_1n_2}}\end{cases}$	Для зависимых выборок равного объема, для независимых выборок равного объема, для независимых выборок неравных объемов n_1 и n_2
Коэффициент вариации Пирсона V (в %)	$\sigma(V)=V\sqrt{\frac{1}{2n}\left[1+2\left(\frac{V}{100}\right)^2\right]}$	В асимптотически нормальном случае
Для параметров асимметрии и эксцесса		
Коэффициент асимметрии As	$\sigma(\mathrm{As})=\sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}\approx\sqrt{\frac{6}{n+3}}$	Приближение допустимо при больших n
Коэффициент эксцесса Ex	$\sigma(\mathrm{Ex})=\sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}\approx\sqrt{\frac{24}{n+5}}$	То же

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
	Для параметров связи	
Коэффициент ранговой корреляции Кендалла τ	$\sigma(\tau) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4n+10}{n(n-1)}}$	—
Коэффициент ранговой корреляции Спирмена ρ	$\sigma(\rho) = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{n-2}}$	В предположении, что ранжирована непрерывная переменная
Коэффициент детерминации $\eta^2_{u/z}$	$\sigma(\eta^2_{u/z}) = \sqrt{\frac{1-\eta^2_{u/z}}{n-N}}$	u — функция, z — аргумент, N — число рассматриваемых значений u, из которых вычислен $\eta^2_{u/z}$
Коэффициент линейной корреляции Бравэ-Пирсона r_{ij}	$\sigma(r_{ij}) = \begin{cases} \frac{1-r^2_{ij}}{\sqrt{n}}, \\ \frac{1-r^2_{ij}}{\sqrt{n-1}}, \\ \sqrt{\frac{1-r^2_{ij}}{n-2}} \end{cases}$	Формула Пирсона — Филоно для выборок $n > 500$, при $n > 100$, при $n < 100$
z_{ij} — преобразование Фишера для r_{ij}	$\sigma(z_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$	Для любых условий

Продолжение табл. 5.1.2

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Разность z-преобразований: $\lvert z_1 - z_2 \rvert$	$\sigma(\lvert z_1 - z_2 \rvert) = \sqrt{\dfrac{n_1 + n_2 - 6}{(n_1 - 3)(n_2 - 3)}}$	При отсутствии (или неучете) частных корреляций первого и более высоких порядков
Степень линейности простой регрессии, определяемая разностью: $\eta^2_{u/z} - r_{uz}$	$\sigma(\eta^2_{u/z} - r^2_{uz}) = \begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{\eta^2 - r^2}{n}[1 - (\eta^2 - r^2)(2 - \eta^2 - r^2)]}, \\ \sqrt{\dfrac{\eta^2 - r^2}{N-2}} \end{cases}$	В зависимости от объема выборки, в зависимости от числа N рассматриваемых значений u
Угловой коэффициент простой линейной регрессии $a^2_{u/z}$	$\sigma(a_{u/z}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(u)}{\sigma(z)}\sqrt{\dfrac{1 - r^2_{uz}}{n-2}}, \\ \dfrac{\sigma(u)}{\sigma(z)} \cdot \dfrac{1 - r^2_{uz}}{\sqrt{n-1}} \end{cases}$	При малых $n < 100$ и при бо́льших ($n > 100$) выборках
Свободный член простой линейной регрессии a_{0u}	$\sigma(a_{0u}) = \sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{n-2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} [u_i - M(u)]^2}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{[M(u)]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} [z_i - M(z)]^2}}}$	—

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Коэффициент множественной нелинейной детерминации $\eta^2_{i.23\ldots N}$	$\sigma(\eta^2_{i.23\ldots N}) = \sqrt{\frac{1-\eta^2_{i.23\ldots N}}{n-N}}$	N — число величин в системе
Коэффициент множественной линейной регрессии $R_{i.23\ldots N}$	$\sigma(R_{i.23\ldots N}) = \frac{1-R^2_{i.23\ldots N}}{\sqrt{n-N}}$	То же
Коэффициент частной корреляции $r_{ij.23\ldots N}$	$\sigma(r_{ij.23\ldots N}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-r^2_{ij.23\ldots N}}{n-N}} \\ \frac{1-r^2_{ij.23\ldots N}}{\sqrt{n-N}} \end{cases}$	При малых $n < 100$ и при бо́льших ($n > 100$) выборках
β_{ij} — коэффициент множественной линейной корессии	$\sigma(\beta_{ij}) = \frac{1-R^2_{i.23\ldots N}}{(1-R^2_{j.23\ldots N})(n-N)}$	—
Парциальный коэффициент множественной линейной регрессии a_{ij}	$\sigma(a_{ij}) = \frac{\sigma_{i.23\ldots N}}{\sigma_{j.23\ldots N}\sqrt{n-N}}$	$\sigma_{i.23\ldots N}$ и $\sigma_{j.23\ldots N}$ определяются из формулы (4.1.15)

Продолжение табл. 5.1.2

Оцениваемый параметр	Формула стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Разность двух коэффициентов множественной детерминации $\Delta\eta_{12}^2$	$\sigma(\Delta\eta_{12}^2)=\sqrt{\dfrac{\lvert\Delta\eta_{12}^2\rvert}{\lvert N_1-N_2\rvert}}$	$\Delta\eta_{12}^2=\eta_{i.23\ldots N_1}^2-\eta_{i.23\ldots N_2}^2$, где N_1 и N_2 — число случайных аргументов. Справедливо и для линейной регрессии
Для величины функционально характеризуемого параметра		
Теоретическое значение условного среднего u^* в простой регрессии	$\sigma(u^*)=\sigma(u)\sqrt{1-\eta_{u/z}^2}$	Для регрессии $u=\psi(z)$ любой формы; $\sigma(u)$ — стандартное отклонение в совокупности можно заменить выборочной оценкой $s(u)$; $\eta_{u/z}^2$ — коэффициент детерминации
То же в линейной множественной регрессии: $u^*=\sum\limits_{i=1}^{N}a_iX_i$	$\sigma(u^*)=\begin{cases}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}a_ia_j\,\mathrm{COV}\,(X_iX_j)}, \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}a_i^2\mathrm{D}\,[X_i]}\end{cases}$	в общем случае, при независимых слагаемых
То же в множественной регрессии произвольной формы: $u^*=\psi(X_1X_2\ldots X_N)$	$\sigma(u^*)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{\partial\psi}{\partial X_i}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial X_j}\cdot\mathrm{COV}\,(X_iX_j)}$	$\dfrac{\partial\psi}{\partial X_i}$ и $\dfrac{\partial\psi}{\partial Xj}$ — частные производные функции ψ по i-тому и j-тому аргументам соответственно

или сходства) называется «нуль»-гипотезой (H_0), а гипотеза о неслучайности называется альтернативной (H_1). Заметим, что проверка предполагает, во-первых, сомнение в истинности гипотезы и, во-вторых, наличие хотя бы двух возможных исходов: принять гипотезу или отбросить ее. Следовательно, можно рассматривать систему из двух альтернативных событий, одно из которых состоит в объективной истинности или ложности гипотезы, а другое — в ее субъективном принятии или отбрасывании. Тогда, в соответствии с табл. (1.3.1) можно построить табл. 5.1.3, в которой представлены вероятности событий при альтернативной проверке гипотез. Все эти вероятности имеют фундаментальное значение в математической статистике, поэтому рассмотрим их подробнее.

Вероятность принятия истинной гипотезы P (П/И) $= 1 - \alpha$ уже упоминалась выше как доверительная вероятность. Можно видеть, что это условная вероятность верного принятия истинной гипотезы.

Вероятность отклонения истинной гипотезы P (О/И) $= \alpha$ — это условная вероятность ошибочного отбрасывания истинной гипотезы. Ошибка исследователя, заключающаяся в отклонении проверяемой гипотезы, если она объективно истинна, называется *ошибкой первого рода*. Эта ошибка в прикладных исследованиях часто интерпретируется как пропуск сигнала наблюдателем или как прием бракованных изделий заказчиком от поставщика. Поэтому вероятность α называется вероятностью ошибки первого рода, пропуска сигнала (цели) или риском заказчика.

Вероятность принять ложную гипотезу P (П/Л) $= \beta$ — это условная вероятность ошибки исследователя, состоящей в том, что ложная гипотеза принимается за истинную. Такая ошибка называется *ошибкой второго рода* и часто интерпретируется как ложная тревога или отклонение заказчиком небракованных изделий. Поэтому вероятность β называется вероятностью ошибки второго рода, ложной тревоги, или риском поставщика.

Вероятность отклонить ложную гипотезу P (О/Л) $= 1 - \beta$ — это условная вероятность верного отбрасывания гипотезы исследователем, если она объективно ложная.

Заметим, что рассмотренные условные вероятности могут быть определены на основе опыта и тогда называются *апостериорными*, но могут быть выбраны априори, на основе имеющейся информации и тогда называются *априорными*.

Вероятности истинности и ложности гипотез тоже могут быть априорными и апостериорными. Очевидно (табл. 5.1.3), что:

$$\begin{aligned} P(\text{И}) &= P(\text{П/И}) + P(\text{О/И}), \\ P(\text{Л}) &= P(\text{П/Л}) + P(\text{О/Л}), \end{aligned} \qquad (5.1.6)$$

а также

$$P(\text{ПИ}) = P(\text{И}) \cdot P(\text{П/И}), \quad P(\text{ОИ}) = P(\text{И}) \cdot P(\text{О/И}),$$

$$P(\text{ПЛ}) = P(\text{Л}) \cdot P(\text{П/Л}), \quad P(\text{ОЛ}) = P(\text{Л}) \cdot P(\text{О/Л}), \quad (5.1.7)$$

Таблица 5.1.3

Вероятности событий при альтернативной проверке гипотез

Объективно / Субъективно	Гипотеза истинна (И)	Гипотеза ложна (Л)	Вероятности исходов
Принятие гипотезы (П)	$P(И/П) = \dfrac{(1-\alpha)P(И)}{(1-\alpha)P(И)+\beta P(Л)}$; $P(П/И) = 1-\alpha$; $P(ПИ) = (1-\alpha)P(И)$	$P(Л/П) = \dfrac{\beta P(Л)}{(1-\alpha)P(И)+\beta P(Л)}$; $P(П/Л) = \beta$; $P(ПЛ) = \beta P(Л)$	$P(П) = (1-\alpha)P(И) + \beta P(Л)$
Отклонение гипотезы (О)	$P(И/О) = \dfrac{\alpha P(И)}{\alpha P(И)+(1-\beta)P(Л)}$; $P(О/И) = \alpha$; $P(ОИ) = \alpha P(И)$	$P(Л/О) = \dfrac{(1-\beta)P(Л)}{\alpha P(И)+(1-\beta)P(Л)}$; $P(О/Л) = 1-\beta$; $P(ОЛ) = (1-\beta)P(Л)$	$P(О) = \alpha P(И) + (1-\beta)P(Л)$
Вероятности гипотез	$P(И)$	$P(Л)$	$P(И)+P(Л) = P(П)+P(О) = 1$

откуда определяются и безусловные вероятности: P (П) — принятия и P (О) — отклонения гипотезы, которые обычно устанавливаются апостериори.

Условные вероятности P (И/П), P (Л/П), P (И/О) и P (Л/О) — это так называемые *апостериорные вероятности гипотез* (или истинности и ложности гипотез). Они определяются на основании принципа Байеса (см. раздел 5.3.1) и служат для уточнения априорно выбираемых безусловных вероятностей истинности и ложности гипотез P (И) и P (Л).

Поведение исследователя, проверяющего статистическую гипотезу, может быть верным и неверным. Верное поведение (событие ВП) объединяет принятие объективно истинной гипотезы (событие ПИ) и отклонение ложной (событие ОЛ). Неверное поведение (событие НП) объединяет ошибки первого (ОИ) и второго (ПЛ) рода. Тогда вероятности верного и неверного поведения выражаются следующим образом (табл. 5.1.3):

$$\left.\begin{aligned} P(\text{ВП}) &= P(\text{ПИ}) + P(\text{ОЛ}) = P(\text{И})(1-\alpha) + (1-\beta) P(\text{Л}), \\ P(\text{НП}) &= P(\text{ПЛ}) + P(\text{ОИ}) = P(\text{И})\,\alpha + \beta P(\text{Л}), \\ P(\text{ВП}) &+ P(\text{НП}) = 1. \end{aligned}\right\} \quad (5.1.8)$$

Отсюда можно видеть, что при фиксированных значениях Р (И) и Р (Л) вероятности верного и неверного поведения непосредственно зависят от α и β-вероятностей ошибок первого и второго рода. Поэтому, задаваясь подходящими значениями α и β, можно максимизировать P (ВП) или минимизировать P (НП). Практически важным, в этой связи, является вопрос о выборе величин α и β, учитывая величины P (И) и P (Л). Здесь выделяют следующие случаи.

Симметричные гипотезы — при P (И) $\approx$ P (Л). Заметим, что из (5.1.8) тогда имеем:

$$P(\text{ВП}) = 1 - 0{,}5(\alpha + \beta), \quad (5.1.9)$$

т. е. верное поведение зависит лишь от α и β, причем при прочих равных условиях безразлично: $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ или $\alpha < \beta$, лишь бы сумма $\alpha + \beta$ была поменьше.

Несимметричные гипотезы — при P (И) $\gg$ P (Л). Здесь положение иное. Если P (И) $\gg$ P (Л), то P (ВП) определяется преимущественно первым слагаемым в правой части (5.1.8) даже при $\alpha = \beta$. Но можно еще увеличить P (ВП), уменьшая α, хотя бы и за счет β, т. е. выгодно выбирать $\alpha \ll \beta$. Если же наоборот, P (И) $\ll$ P (Л), тогда P (ВП) преимущественно определяется вторым слагаемым в (5.1.8), и следует максимизировать его, уменьшая β, т. е. выбирая $\alpha \gg \beta$.

Таким образом, выбор стратегии поведения исследователя при проверке статистической гипотезы определяется наличием априорной информации о P (И) и P (Л) — об истинности или ложности проверяемой гипотезы. Если таковая информация полностью

отсутствует, то выгодно считать P (Л) $=$ P (И) и, минимизируя α и β, одинаково часто принимать решение об истинности и ложности гипотезы. При наличии верной априорной информации выбирают $\alpha < \beta$ или, наоборот, соответственно P (И) $>$ P (Л) или P (И) $<$ $<$ P (Л). Но такой выбор усугубляет дело при неверной априорной информации. В этой связи α и β выступают в качестве непосредственных мер ненадежности, а вероятности $1 - \alpha$ и $1 - \beta$ — в качестве мер надежности статистических оценок.

5.1.5. Задачи статистической проверки гипотез в психологических исследованиях

Первой основной задачей, по нашему мнению, является репрезентативное выборочное описание свойств генеральных совокупностей. Учитывая сказанное выше о различиях между выборками и генеральными совокупностями, ясно, что для такого описания значительных по объему совокупностей психических свойств, состояний, процессов и функций требуется накопление огромного выборочного материала или проведение исследований в национальном масштабе. Несмотря на большое число экспериментальных исследований, накопленный материал все же нельзя считать достаточным, а исследования в национальном масштабе слишком трудоемки и сложны для проведения. Поэтому задача репрезентативного описания, предполагая накопление материала, сводится ко второй основной задаче, а именно — к задаче проверки однородности выборочных описаний, полученных в разных исследованиях, и к объединению однородных данных. Заметим в этой связи, что для проверки однородности необходимы, во-первых, однообразность статистических описаний одних и тех же психических явлений разными авторами и, во-вторых, — указание в публикациях на величину объемов выборок, из которых вычислялись статистические оценки параметров и функций.

Можно выделить также ряд частных задач, способствующих решению указанных основных. Для любых генеральных совокупностей это, во-первых, сопоставление выборочных параметрических и функциональных характеристик с аналогичными характеристиками известных генеральных совокупностей (или, по крайней мере, — с выборками бо́льшего объема); во-вторых, это аппроксимация функций распределения и связи теоретическими кривыми. Для гетерогенных совокупностей это выявление структуры совокупности (в частности, определение числа существенных переменных, необходимого и достаточного для описания совокупности); определение вида и характера связей между переменными и минимизация числа переменных. Дальнейшую детализацию задач можно проводить в соответствии с конкретными видами параметрических и функциональных характеристик совокупностей и выборок (рис. 5.1.1.—5.1.3).

Резюмируя, подчеркнем, что задачи статистической проверки гипотез являются необходимой частью научных задач, стоящих перед психологами и представителями смежных наук, но не исчерпывают всего множества таких задач. Поэтому формальные методы математической статистики должны не заменять, а дополнять содержательные методы психологических дисциплин.

§ 5.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ И ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

5.2.1. Понятие о статистических критериях

Под критерием вообще понимается решающее правило, обусловливающее поведение в ситуации выбора. *Статистическим критерием* (в отличие от других научных критериев) называется правило, обеспечивающее надежное поведение, т. е. принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью.

В качестве критериев в математической статистике используются определенные случайные величины, которые являются неслучайными функциями от изучаемых случайных величин и от так называемого числа степеней свободы (стр. 294), зависящего от числа наблюдений. Пусть критерием является случайная величина $Y^* = \psi(\theta^*, \nu)$, где ψ — неслучайная функция от параметра θ^* и числа степеней свободы ν. Должна быть известна функция распределения $F(Y^*_\alpha, \nu)$, которая обычно табулируется (как это сделано в табл. VII—X Приложения 2). Тогда использование критерия Y^* для оценки θ параметра θ^* или проверки статистической гипотезы об этом параметре состоит в следующем.

При оценке неизвестного параметра θ^* доверительным интервалом (5.1.5) для выбранной α по таблицам распределения $F(Y^*_\alpha, \nu)$ определяется теоретическое значение квантиля критерия $Y^*_{\alpha,\nu}$, которое показывает, насколько стандартных погрешностей $\sigma(\theta)$ может отклоняться значение параметра θ^* от его выборочной оценки θ при данном числе степеней свободы (как функции от объема выборки):

$$\theta - Y^*_{\alpha,\nu}\sigma(\theta) \leqslant \theta^* \leqslant \theta + Y^*_{\alpha,\nu}\sigma(\theta). \tag{5.2.1}$$

При проверке гипотезы относительно θ^* всегда в сущности проверяется вопрос, может служить θ оценкой θ^* или нет. При этом формулировать «нулевую» гипотезу можно относительно различия θ и θ^*: «различие случайно», но тогда альтернативная гипотеза формулируется относительно сходства: «сходство неслучайно». Можно, наоборот, формулировать «нулевую» гипотезу относительно сходства θ и θ^*: «сходство случайно», но тогда альтернативная гипотеза касается различия: «различие неслучайно». При такой классической (альтернативной) формулировке гипотез по выборке находят оценку параметра θ. По функции ψ вычисляют эмпирическое значение критерия $Y^э$, а по таблице $F(Y^*_\alpha, \nu)$

находят для заданного α и обусловленного объемом выборки ν теоретическое значение квантиля $Y^*_{\alpha,\nu}$ и производят сравнение:

$$Y^э \leqslant Y^*_{\alpha,\nu} \text{ или } Y^э > Y^*_{\alpha,\nu}. \qquad (5.2.2)$$

Смысл уравнения (5.2.2) в зависимости от данных выше формулировок статистических гипотез можно пояснить следующим образом. Вспомним, что квантиль Y_α есть значение переменной Y, которому соответствует доля площади под кривой плотности, численно равная вероятности α. Тогда, изображая вероятности α и $1-\alpha$, как показано на рисунке 5.2.1, *а*, *б*, и учитывая табл. 5.1.3, можем записать правила выбора. Если $\underbrace{Y^э \leqslant Y^*_{\alpha,\nu}}_{\text{область } 1-\alpha}$, то различие θ и θ^* случайно, а сходство неслучайно (рис. 5.2.1, *а*), следовательно, принимается гипотеза о сходстве эмпирической оценки θ с теоретическим параметром θ^*. Если же $\underbrace{Y^э > Y^*_{\alpha,\nu}}_{\text{область } \alpha}$, то сходство θ и θ^* случайно, а различие неслучайно (рис. 5.2.1, *б*), следовательно, принимается гипотеза о различии между оценкой θ и параметром θ^*. Заметим, что, проверяя в качестве «нулевой»

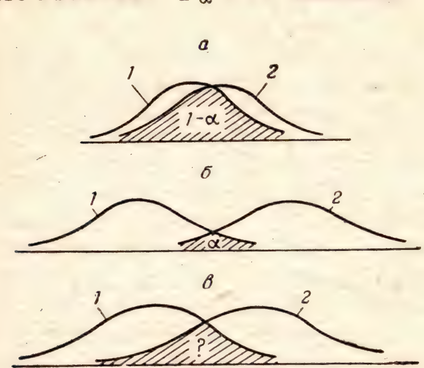


Рис. 5.2.1. Пояснение сопоставления эмпирического и критического значений квантилей.

1 — эмпирическое, *2* — теоретическое распределение. По осям ординат — плотности вероятности $f(Y)$, по осям абсцисс — Y. *а* — незаштрихованная площадь под кривыми равна α; $Y^э \leqslant Y^*_{\alpha,\nu}$ и различие считается случайным, а сходство неслучайным; *б* — незаштрихованная площадь под кривыми равна $1-\alpha$; $Y^э > Y^*_{\alpha,\nu}$ и сходство считается случайным, а различие неслучайным; *в* — заштрихованная область пересечения мала для $1-\alpha$ и велика для α, при этом $Y^*_{\alpha 1,\nu} < Y^э \leqslant Y^*_{\alpha 2,\nu}$, где $\alpha_2 - \alpha_1$ — интервал неопределенности; чтобы обоснованно принять или отклонить гипотезу, необходимо провести дополнительные наблюдения.

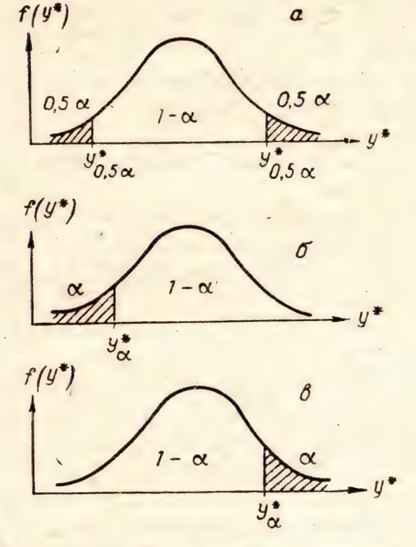


Рис. 5.2.2. Пояснение односторонних и двусторонних критериев.

а — двусторонний критерий; ординаты $Y^*_{0,5\alpha}$ слева и справа называются критическими значениями соответственно «снизу» и «сверху»; *б* — односторонний критерий, Y^*_α — критическое значение снизу, *в* — односторонний критерий, Y^*_α — критическое значение сверху.

гипотезу о сходстве, мы принимаем альтернативную гипотезу о различии и, наоборот, проверяя в качестве «нулевой» гипотезу о различии, мы принимаем альтернативную гипотезу о сходстве, т. е. статистическую гипотезу проверяют доказательством «от противного».

Среди возможных статистических критериев выделяют: односторонние и двусторонние, параметрические и непараметрические, более и менее мощные.

Понятие одностороннего либо двустороннего критерия связано с формулировкой гипотез. Если «нулевая» гипотеза формулируется о равенстве (сходстве) $\theta = \theta^*$, то для проверки используется двусторонний критерий, теоретический квантиль которого $Y^*_{\alpha, \nu}$ определяется, в сущности, для $0{,}5\alpha$, как показано на рис. 5.2.2, *а*. Если же «нулевая» гипотеза формулируется о неравенстве (о различии), то возможны три формулировки: $\theta \neq \theta^*$, $\theta > \theta^*$ или $\theta < \theta^*$. Для первой формулировки снова используется двусторонний критерий. Но для второй и третьей — односторонние. Смысл одностороннего критерия — это нижняя или верхняя границы доверительного интервала (рис. 5.2.2, *б* и *в*), соответственно говорят о нижнем критическом значении (рис. 5.2.2, *б*) и верхнем критическом значении (рис. 5.2.2, *в*) критерия Y^*.

Параметрические критерии — это некоторые функции от параметров совокупности, они служат для проверки гипотез об этих параметрах или для их оценивания.

Непараметрические критерии — это некоторые функции от функций распределения или непосредственно от вариационного ряда наблюдавшихся значений изучаемого случайного явления. Они служат только для проверки гипотез о функциях распределения или о рядах наблюдавшихся значений.

Важнейшей характеристикой любого статистического критерия является его *мощность*. Под мощностью критерия понимается его способность правильно отбрасывать ложную гипотезу. Мощность оценивается вероятностью $1 - \beta$ и, следовательно, согласно уравнениям (5.1.8), зависит от вероятностей P (И), P (*Л*) и α, так что один и тот же критерий может иметь разную мощность для разных сочетаний этих вероятностей. Функция, определяющая значения $1 - \beta$ в зависимости от указанных вероятностей и числа наблюдений, называется *функцией мощности* критерия. Она позволяет, смотря по обстоятельствам, выбрать подходящий критерий для его практического использования, а также используется при разработке новых критериев.

В математической статистике для различных приложений создано большое количество параметрических и непараметрических критериев, многие из которых маломощны или не определены по мощности. Поэтому в психологических приложениях лучше пользоваться сравнительно небольшим набором основных критериев, наиболее мощных в большинстве случаев. Их мы и рассмотрим ниже.

5.2.2. χ^2-критерий Пирсона

Наиболее мощным непараметрическим критерием является критерий χ^2 по Пирсону. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ — независимые случайные величины, распределенные нормально со средним арифметическим, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Тогда сумма этих величин $\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} y_i$ распределена с плотностью, зависящей только от ν, как показано на рис. 5.2.3, и при увеличении ν асимптотически стремящейся к нормальной плотности.

Величина ν называется числом степеней свободы. Остановимся на этом понятии подробно. В математической статистике под *числом степеней свободы* понимается число фактически возможных направлений изменчивости. В этой связи выделяются следующие понятия. Число (теоретически) возможных степеней свободы; число «связанных» степеней свободы и число «свободных», т. е. фактически возможных степеней свободы.

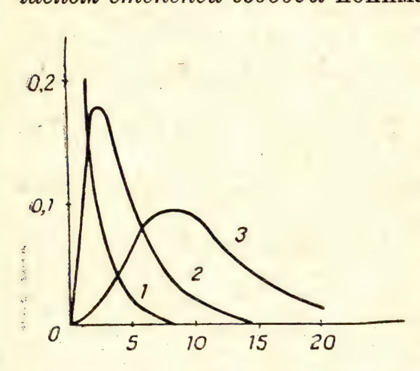


Рис. 5.2.3. Плотность χ^2-распределения.

По оси ординат — плотность, по оси абсцисс — значения χ^2; *1* — при $\nu = 1$, *2* — при $\nu = 4$ и *3* — при $\nu = 10$.

Число *возможных* степеней свободы есть количество наблюдений. Это для отдельного события — число случаев его появления и непоявления (n). Для отдельной случайной величины — это вектор значений величины числом n, а для вариационного ряда — число классов группировки k. Для двумерной системы величин (или событий) при несгруппированных данных — это n^2, а при сгруппированных — это $k_X k_Y$. Наконец, в общем случае N-мерной случайной системы — это общее число пересечений интервалов квантования L, определенное выше уравнением (4.1.6), причем величины k_i и L являются функциями от числа наблюдений.

Число «*связанных*» (несвободных) степеней свободы понимается следующим образом. Пусть суммируются n значений x_i вектора $\vec{X}$, результатом чего является $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Тогда можно сохранять их сумму фиксированной при любом случайном сочетании $n - 1$ значения x_i, лишь бы одно из этих значений неслучайным образом дополняло остальные. Следовательно, одно значение является «связанным», несвободным при всяком суммировании. Аналогично при r суммированиях связывается r степеней свободы. Заметим, что вычисляя r моментов распределения (считая нулевые моменты), мы суммируем r раз, так что для одномерного распреде-

ления с числом параметров l всегда «связывается» $r = l + 1$ степень свободы. Так, для нормального, гамма- и биноминального распределений число связываемых степеней свободы: $r = 3$, для пуассоновского: $r = 2$.

Число *фактически* возможных (свободных) степеней свободы (ν) определяется разностью между числом теоретически возможных и «связанных» степеней свободы. Для вектора значений (или вероятностей) случайной величины: $\nu = n - 1$, для ее распределения, полученного группировкой наблюдений в k интервалов: $\nu = k - r$, для таблицы N-мерного распределения вероятностей системы событий (или случайных величин): $\nu = (n - 1) \times \times (m - 1)$, где n — число строк, а m — число столбцов такой таблицы.

Квантили χ^2-распределения для значений $\alpha = 0{,}05$ и $0{,}01$ и $\nu = 1, 2, \ldots, 1000$ приведены в табл. VII Приложения 2. Основные направления применений χ^2-критерия: а) сравнение сходства (различия) двух и более распределений; б) оценка стохастической независимости (зависимости) систем случайных событий и величин, а также сравнение матриц переходных вероятностей для оценки цепи событий как бернуллиевской или марковской (простой или сложной); в) проверка однородности парных корреляций; г) формирование других статистических критериев.

Сравнение двух распределений может осуществляться как сравнение выборочного распределения с каким-либо теоретическим законом или как сравнение двух и более выборочных распределений. В первом случае проверяется гипотеза о том, можно ли рассматривать отличия выборочного распределения от его теоретической аппроксимации данного вида как случайные, иначе говоря, является ли выборочное распределение нормальным, гамма- или каким-нибудь другим. Во втором случае ставится вопрос о том, случайны ли различия между двумя или несколькими выборочными распределениями (к какому бы виду они ни принадлежали). Рассмотрим оба случая на примерах.

Пример 5.2.1. В примере 2.4.1 эмпирический ряд распределения значений амплитуды установившихся колебаний руки человека был аппроксимирован нормальным распределением. Значения частостей p_i и вероятностей p_i^* приводились в табл. 2.4.1. Проверим для этих данных, пользуясь критерием χ^2, следующую «нулевую» гипотезу: отличия выборочного распределения частостей от теоретического нормального распределения вероятностей являются случайными.

При сравнении выборочного и аппроксимирующего распределений используется следующая формула χ^2-критерия:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*} = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(p_i - p_i^*)^2}{p_i^*} \qquad (5.2.3а)$$

или

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i^2}{f_i^*} - n = n\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^2}{p_i^*} - 1\right), \qquad (5.2.3б)^*$$

где f_i и f_i^* — эмпирическая и теоретическая частоты i-того интервала группировки; p_i и p_i^* — частости и аппроксимирующие вероятности; n — число наблюдений; $np_i = f_i$, $np_i^* = f_i^*$; k — число интервалов группировки после объединения интервалов, в которых $f_i < 5$.

Так как два верхних интервала в эмпирическом распределении имеют частоты меньше пяти (см. табл. 2.3.11), то их следует объединить, суммируя частости. Аналогично следует частость последнего интервала суммировать с частостью третьего снизу интервала. Соответственно суммируются и вероятности p_i^*. В результате для вычисления эмпирического χ^2 используются p_i и p_i^*, представленные в табл. 5.2.1; там же показано и вычисление χ^2 по формуле (5.2.3 а).

Таблица 5.2.1

Вычисление χ^2 к примеру 5.2.1

p_i	p_i^*	$\lvert p_i - p_i^* \rvert$	$(p_i - p_i^*)^2$	$(p_i - p_i^*)^2 / p_i^*$
0,025	0,018	0,006	0,000036	0,0025
0,045	0,054	0,010	0,001000	0,0185
0,125	0,119	0,006	0,000036	0,0003
0,145	0,193	0,048	0,002304	0,0119
0,290	0,231	0,059	0,003481	0,0151
0,185	0,193	0,008	0,000064	0,0003
0,110	0,119	0,009	0,000081	0,0007
0,075	0,072	0,003	0,000009	0,0001

$n = 200$, $\chi^2 = 200 \cdot 0{,}0494 = 9{,}88$,

$\nu = 8 - 3 = 5$,

$$\chi^2 < \chi^2_{0,05/5} = 11{,}1$$

Мы проверяем гипотезу о нормальном распределении, у которого два параметра; значит, $r = 3$ и $\nu = k - 3$. По табл. VII Приложения 2 находим, что с доверительной вероятностью 0,95 квантиль $\chi^2_{\ 0,05/\nu=5} = 11{,}1$. Это меньше эмпирического $\chi^2 = 9{,}88$, следовательно, отличия эмпирического распределения от нормального можно считать случайными; аппроксимация удовлетворительна.

Сравнивать две или более эмпирических совокупности обычно требуется для того, чтобы установить, являются ли они выборками

* Считается, что формула (5.2.3а) предпочтительней, чем (5.2.3б), так как последняя требует большей точности промежуточных вычислений.

из одной и той же генеральной совокупности, и можно ли их объединить, чтобы получить выборку большего объема. Пусть имеется s эмпирических распределений, полученных в несколько различных условиях (например, разными авторами) и (в общем случае) имеющих неодинаковые объемы n_j ($j = 1, 2, \ldots, s$). Если это случайные выборки из одной совокупности, то логично предполагать, что их частости p_{ij} в каждом i-том интервале случайным образом рассеиваются вокруг теоретической вероятности p_i^* i-того интервала группировки. Тогда ожидаемую частость p_i^* выборки суммарного объема $\sum_{j=1}^{s} n_j$ разумно определить как взвешенное среднее арифметическое частостей p_{ij} объединяемых выборок:

$$p_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{s} n_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^{s} n_j}. \tag{5.2.4}$$

Для получения расчетной формулы χ^2-критерия в случае сравнения произвольного числа s выборок неравных объемов n_j воспользуемся свойством χ^2-распределения, согласно которому сумма из s независимых слагаемых, имеющих χ_j^2-распределение с ν_j степенями свободы, также имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $\sum_{j=1}^{s} \nu_j$. Тогда

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{s} n_j \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{(p_{ij} - p_i^*)^2}{p_i^*} \right] = \sum_{j=1}^{s} n_j \left| \sum_{i=1}^{k} \frac{p_{ij}^2}{p_i^*} - 1 \right|, \tag{5.2.5}$$

где k — равное для проверяемых (объединяемых) выборок число интервалов группировки; p_i^* — определено выше уравнением (5.2.4), p_{ij} — частости i-того интервала j-того эмпирического распределения. Так как $\sum_{i=1}^{k} \frac{p_{ij}^2}{p_i^*}$ может быть больше либо меньше единицы, берется абсолютное отклонение этой суммы от единицы. Число степеней свободы ν, необходимое в этом случае для определения квантиля $\chi^2_{\alpha,\nu}$ из табл. VII Приложения 2, находят следующим образом. Каждое из слагаемых χ^2 определяют, исходя из $\nu = k - 1$ степеней свободы (одна степень «связывается» на нулевой начальный момент). Но суммируют s слагаемых, и на эту сумму тоже «связывается» одна степень свободы, так что всего получается степеней свободы:

$$\nu = \sum_{j=1}^{s-1} (k - 1) = (s - 1)(k - 1). \tag{5.2.6}$$

Пример 5.2.2. В примере 2.3.2. были рассмотрены три способа группировки, различающиеся принципом размещения «граничных»

значений вариант по интервалам. Требуется оценить, будут ли однородными эмпирические распределения, получаемые такими разными способами. Исходные данные приведены в трех последних столбцах табл. 2.3.8. Соответственно обозначим вероятности: $p_i\,(x_i \leqslant X < x_{i+1}) \equiv p_{i\,1}$, $p_i\,(x_i < X \leqslant x_{i+1}) \equiv p_{i\,2}$ и $p_i\,(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1}) \equiv p_{i\,3}$, объединим, суммируя частости, два верхних и три нижних интервала (чтобы выполнялось: $f_{ij} \geqslant 5$), после чего результаты представим, как показано в табл. 5.2.2.

Таблица 5.2.2

Вычисление χ^2 к примеру 5.2.2.

p_j	p_{ij}	p^2_{ij}	$p^2_{ij} : p^2_i$
$p_{i\,1}$	0,025	0,000625	6,25 : 275 ≈ 0,0227
	0,045	0,002025	20,25 : 575 ≈ 0,0352
	0,125	0,015625	и т. д. 0,1250
	0,145	0,021025	0,1237
	0,290	0,084100	0,3058
	0,185	0,029425	0,1658
	0,110	0,012100	0,1180
	0,075	0,005625	0,0865
$p_{i\,2}$	0,030	0,000900	9 : 275 ≈ 0,0327
	0,070	0,004900	49 : 575 ≈ 0,0852
	0,125	0,015625	и т. д. 0,1250
	0,195	0,038025	0,2237
	0,260	0,067600	0,2458
	0,170	0,028900	0,1628
	0,095	0,009025	0,0881
	0,055	0,003025	0,0466
$p_{i\,3}$	0,0275		
	0,0575		
	0,1250		
	0,1700		
	0,2750		
	0,1775		
	0,1025		
	0,0650		
	$n = 200$		

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{p^2_{i\,1}}{p_{i\,3}} = 0{,}9827, \qquad \sum_{i=1}^{8} \frac{p^2_{i\,2}}{p_{i\,3}} = 1{,}0099,$$

$$\chi^2 = 200\,(\,|\,0{,}9827 - 1\,| + |\,1{,}0099 - 1\,|\,) = 4{,}72,$$

$$\nu = (2-1)\,(8-1) = 7,$$

$\chi^2_{0,05/\nu=7} = 14{,}1$ по табл. VII Приложения 2.

$$\chi^2 < \chi^2_{0,05/7}$$

Теоретическая вероятность (как частость объединенной выборки) определяется здесь, очевидно, как $p^*_i = (p_{i\,1} + p_{i\,2} + p_{i\,3}) : 3 = p_{i\,3}$. При этом не к чему вычислять $p^2_{i\,3}/p_{i\,3}$, а $\sum\limits_{i=1}^{k} p_{i\,3} = 1$. Следовательно, вычислительная формула χ^2 для нашего примера получается из формулы (5.2.5) путем несложных преобразований:

$$\chi^2 = n\left[\sum_{j=1}^{2}\left|\sum_{i=1}^{8}\frac{p^2_{ij}}{p_{i\,3}} - 1\right|\right] \quad \text{при } j = 1,\ 2.$$

Результаты вычислений и проверки гипотезы приведены в табл. 5.2.2. Можно видеть, что эмпирические распределения, полученные разными способами группировки, однородны. Следует, однако, заметить, что данный вывод справедлив лишь при $n = 200$. Нетрудно видеть, что уже при $n > 600$ различие в способах группировки, рассмотренное в § 2.3, приведет к неоднородности получаемых эмпирических распределений, а это в конечном счете означает неадекватность выборочного описания генеральной совокупности.

Оценка статистической однородности может выполняться для двух и более многомерных распределений частостей событий (величин). Тем самым решается вопрос о возможности объединения соответствующих выборок в одну бо́льшего объема.

Пример 5.2.3. В примере 4.3.1 оценивалось распределение значений социометрического статуса, эмоциональной экспансивности и нейротизма для выборки объемом $n_1 = 42$ у студентов одного из курсов психологического факультета (табл. 4.3.2). Для студентов другого курса получена новая выборка, объемом $n_2 = 57$, для которой распределение частостей приведено в табл. 5.2.3. Требуется проверить, однородны ли обе выборки в статистическом смысле, и если да, то объединить их.

Таблица 5.2.3

Частости совместного распределения социометрического статуса (X_1), эмоциональной экспансивности (X_3) и нейротизма (X_2) второй выборки студентов (к примеру 5.2.3)

	$x_{21} \equiv X_2 < 13{,}5$		$x_{22} \equiv X_2 > 13{,}5$	
	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geqslant 0$	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geqslant 0$
$x_{11} \equiv X_1 < 0$	$p_{111} = 0$	$p_{112} = 0{,}12$	$p_{121} = 0$	$p_{122} = 0{,}02$
$x_{12} \equiv X_1 \geqslant 0$	$p_{211} = 0{,}04$	$p_{212} = 0{,}52$	$p_{221} = 0$	$p_{222} = 0{,}30$

Пользуясь формулой (5.2.4), вычислим ожидаемые значения частостей в объединенной выборке:

$$p^{**}_{111} = \frac{1}{99} \cdot (0{,}07 \cdot 42 + 0{,}00 \cdot 57) \approx 0{,}03,$$

$$p^{**}_{112} = \frac{1}{99} \cdot (0{,}07 \cdot 42 + 0{,}12 \cdot 57) \approx 0{,}10$$

и т. д. — результаты приведены в табл. 5.2.4. Остальной расчет χ^2 осуществим по формуле (5.2.5), как показано в табл. 5.2.4. Можно видеть, что различия частостей случайны, значит, обе выборки статистически однородны и допустимо объединение. Частости

Таблица 5.2.4

К вычислению эмпирического χ^2 в примере 5.2.3

$p_{k=1,2}$	p_{ijmk}	p^2_{ijmk}	p^2_{ijmk}/p^{**}_{ijm}
p_1	0,07	0,0049	0,163
	0,07	0,0049	0,049
	0,10	0,0100	0,250
	0,02	0,0004	0,020
	0,07	0,0049	0,010
	0,34	0,1156	0,256
	0,07	0,0049	0,163
	0,26	0,0676	0,241
p_2	0,00	0,0000	0,000
	0,12	0,0144	0,144
	0,00	0,0000	0,000
	0,02	0,0004	0,020
	0,04	0,0016	0,032
	0,52	0,2704	0,601
	0,00	0,0000	0,000
	0,30	0,0900	0,321
p^{**}_{ijm}	0,03		
	0,10		
	0,04		
	0,02		
	0,05		
	0,45		
	0,03		
	0,28		

$n_1 = 42, \quad n_2 = 57,$

$n = 99$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} \frac{p^2_{ijm1}}{p^{**}_{ijm}} = 1{,}152,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} \frac{p^2_{ijm2}}{p^{**}_{ijm}} = 1{,}118,$$

$$\chi^2 = 42\,(1{,}152-1) + 57\,(1{,}118-1) \approx 13{,}1,$$

$$\nu = (2-1)\,(8-1) = 7,$$

$$\chi^2_{0,05/7} = 14{,}1 > \chi^2 = 13{,}1,$$

т. е. выборки однородны

объединенной выборки приведены в табл. 5.2.5. Заметим, что это те же самые ожидаемые частости p^{**}_{ijm}, что и в табл. 5 2.4.

Оценка стохастической независимости в системе случайных событий (величин) осуществляется путем сопоставления эмпирической величины χ^2, образующей числитель в формулах (2.3.29) и (4.1.19) для коэффициента Чупрова, с табличным значением квантиля $\chi^2_{\alpha,\nu}$. Причем число степеней свободы всегда определяется по уравнению (5.2.6) как $\nu = (m-1)(n-1)$, где m — число строк таблицы совместного распределения частостей событий (величин), а n — число столбцов; для формулы (4.1.19): $m \equiv t$ и $n \equiv g$. «Нулевая» гипотеза в этом случае формулируется, например, так: «величина коэффициента Чупрова случайно отличается от нуля (незначима)», т. е. стохастическая связь отсутствует, события (величины) независимы в стохастическом смысле.

Таблица 5.2.5

Частости совместного распределения статуса (X_1), эмоциональной экспансивности (X_3) и нейротизма (X_2) в объединенной выборке ($n=99$)

	$x_{21} \equiv X_2 < 13{,}5$		$x_{22} \equiv X_2 > 13{,}5$	
	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geqslant 0$	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geqslant 0$
$x_{11} \equiv X_1 < 0$	$p_{111}=0{,}03$	$p_{112}=0{,}10$	$p_{121}=0{,}04$	$p_{122}=0{,}02$
$x_{12} \equiv X_1 \geqslant 0$	$p_{211}=0{,}05$	$p_{212}=0{,}45$	$p_{221}=0{,}03$	$p_{222}=0{,}28$

Пример 5.2.4. Проверим значимость коэффициента Чупрова, вычисленного в примерах 1.3.9 и 4.3.1. В первом из них оценивалась сопряженность между цветом волос и глаз. Эмпирическое значение $\chi^2 = 106$; при $\nu = (3-1)(4-1) = 6$ из табл. VII Приложения 2 находим: $\chi^2_{0,01/6} = 16{,}8$, что значительно меньше эмпирического χ^2. Следовательно, искомая сопряженность несомненна, и $K = 0{,}25$ значимо отличается от нуля.

Во втором примере эмпирическое значение $\chi^2 \approx 9{,}28$. При числе степеней свободы $\nu = (2-1)\cdot(4-1) = 3$ квантиль $\chi_{0,01/3} = 11{,}3$, а квантиль $\chi_{0,05/3} = 7{,}82$. Оказывается, что имеет место не предусмотренный нами до сих пор случай: $\chi^2_{0,05/3} < \chi^2_э < \chi^2_{0,01/\nu}$. Этот случай будет подробнее рассмотрен в § 5.3, а здесь отметим, что в такой ситуации обоснованного решения принять нельзя: требуются дополнительные наблюдения. Можно, однако, предполагать, что при увеличении числа наблюдений наличие стохастической связи статуса, эмоциональной экспансивности и нейротизма будет статистически обосновано. Действительно, по результатам предшествующего примера для объединенной выборки (99 студентов) значение $\chi^2 \approx \approx 13{,}1$. В силу свойства аддитивности χ^2-распределения, упомянутого выше, эта величина χ^2 соответствует числителю коэффициента совместной детерминации (4.1.19), определяемого для совместного распределения частостей объединенной выборки, представленных в табл. 5.2.5. Так как $\chi^2 = 13{,}1 > \chi^2_{0,01/3} = 11{,}3$, можно считать, что статус, экспансия и нейротизм стохастически зависимы. Определяя заново по (4.1.19) коэффициент совместной детерминации, получаем достоверно отличные от нуля значения: $K^2_N \approx 0{,}0765$ и $K_N \approx 0{,}28$.

Оценка эмпирической последовательности событий как бернуллиевской или марковской цепи (простой или сложной) может состоять в проверке однородности матриц переходных частостей, вычисленных для разных начал отсчета перехода, либо (для проверки «простоты» цепи Маркова) в сопоставлении s эмпирических матриц последовательных переходов $A_2, \ldots, A_{s+1}$ с матрицами $A^*_2 = A^2_1$, $A^*_3 = A^3_1; \ldots; A^*_{s+1} = A^{s+1}_1$, вычисленными в предположении,

что аппроксимирующая цепь Маркова — простая. При такой проверке эмпирическое значение χ^2 вычисляется по формуле (5.2.5), а число степеней свободы для квантиля $\chi^2_{\alpha,\nu}$ определяется по формуле (5.2.6), где k — порядок матриц перехода. Так, процесс запоминания группы слов в эксперименте по свободному воспроизведению, рассмотренный в примере 1.3.11, действительно является простым марковским, так как для него $\chi^2 = 0{,}6$, т. е. значительно меньше любого критического $\chi^2_{0,05/\nu}$.

Проверка однородности парных корреляций может осуществляться для диагональных элементов корреляционной матрицы с целью установить, стационарна или нет случайная функция, либо для нескольких корреляционных матриц с целью установить их однородность. Поскольку корреляционную матрицу можно рассматривать как объединение векторов коэффициентов корреляции (строк или диагоналей), то начнем с более общего случая проверки однородности корреляционных матриц.

Пусть требуется проверить однородность s корреляционных матриц порядка N. Для каждого из $0{,}5N\,(N-1)$ различных коэффициентов корреляции r_{ijk} ($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, N$; но $i \neq j$; $k = 1, 2, \ldots, s$) по табл. III Приложения 2 определяется соответствующее z_{ijk}-преобразование по Фишеру. Тогда для каждого коэффициента корреляции r_{ij} имеем в сопоставляемых матрицах l-ный вектор из s z_{ijk}-преобразований, распределенных асимптотически нормально, с общим средним арифметическим z^*_{ijl} и дисперсией ошибки

$$\mathrm{D}\,(z_{ijk}) = \frac{1}{n_k - 3}\,, \tag{5.2.7}$$

где n_k — объем выборки, из которой определены коэффициенты корреляции k-той матрицы. Как и прежде, будем считать, что ожидаемое среднее арифметическое значение z^*_{ijl} для l-ного вектора есть среднее взвешенное:

$$z^*_{ijl} = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{s} (n_k - 3)\, z_{ijk}}{\sum\limits_{k=1}^{s} (n_k - 3)}, \\ \dfrac{1}{s_l} \sum\limits_{k=1}^{s} z_{ijk} \quad \text{при } n_1 = n_2 = \ldots = n_k. \end{cases} \tag{5.2.8}$$

Для s матриц порядка N всего имеется $L = 0{,}5N\,(N-1)$ различных l-ных векторов ($l = 1, 2, \ldots, L$), которые надо сопоставлять. В этой связи эмпирическое значение χ^2 может быть полу-

чено как сумма по L и s взвешенных частотой $(n_k - 3)$ квадратов центральных отклонений $(z_{ijk} - z^*_{ijl})^2$:

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{s}(n_k-3)(z_{ijk}-z^*_{ijl})^2 =$$

$$= \sum_{l=1}^{L}\left\{\sum_{k=1}^{s}(n_k-3)\,z^2_{ijk} - \frac{\left[\sum_{k=1}^{s}(n_k-3)\,z_{ijk}\right]^2}{\sum_{k=1}^{s}(n_k-3)}\right\}, \tag{5.2.9}$$

где $l = 1, 2, \ldots, L$ — номер вектора проверяемых на однородность коэффициентов корреляции. При одинаковых объемах выборок все $n_k \equiv n$, и формула (5.2.9) упрощается:

$$\chi^2 = (n-3)\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{s}(z_{ijk}-z^*_{ijl})^2 = (n-3)\sum_{l=1}^{L}\left[\sum_{k=1}^{s}z^2_{ijk} - \frac{1}{s}\left(\sum_{k=1}^{s}z_{ijk}\right)^2\right]. \tag{5.2.10}$$

Очевидно, что при сопоставлении матриц корреляций, как и для матриц вероятностей, число степеней свободы определяется формулой (5.2.6), что в новых обозначениях дает $\nu = (L - 1)(s - 1)$.

Таблица 5.2.6

Проверка однородности двух корреляционных матриц

Выборка	r_{ijk}	z_{ijk}	$z_{ijk}-z^*_{ijl}$	$(z_{ijk}-z^*_{ijl})^2$	$(n_k-3)(z_{ijk}-z^*_{ijl})^2$
Первая	−0,234	−0,2342	0,0308	0,00013864	0,00540696
	0,302	0,3095	0,0853	0,00727609	0,28376751
	−0,238	−0,2448	0,0694	0,00481636	0,18783804
Вторая	−0,276	−0,2877	0,0227	0,00051529	0,02782566
	0,162	0,1614	0,0628	0,00394384	0,21296736
	−0,347	−0,3654	0,0512	0,00262144	0,14155776
Объединенная	−0,259	−0,2650			
	0,220	0,2242			
	−0,304	−0,3142			

$$z^*_{121} = \frac{1}{99}\cdot(0{,}2342\cdot 42 + 0{,}2877\cdot 57) = 0{,}2650,$$

$$z^*_{132} = \frac{1}{99}\cdot(0{,}3095\cdot 42 + 0{,}1614\cdot 57) = 0{,}2242,$$

$$z^*_{233} = \frac{1}{99}\cdot(0{,}2448\cdot 42 + 0{,}3654\cdot 57) = 0{,}3142,$$

$n_1 = 42,\quad n_2 = 57,$

$n = 99,$

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}(n_k-3)(z_{ijk}-z^*_{ijl})^2 \cong 0{,}85936329 \approx 0{,}86.$$

$\nu = (2-1)(3-1) = 2.$ $\chi^2_{0,05/2} = 5{,}99 > \chi^2 = 0{,}86$, т. е. выборки однородны.

Сопоставление s коэффициентов корреляции «внутри» l-ного вектора, очевидно, должно осуществляться по тем же формулам (5.2.9 или 5.2.10), если положить в них $\sum_{l=1}^{L} \equiv 1$. Соответственно число степеней свободы будет $\nu = s - 1$.

Пример 5.2.5. В табл. 4.3.5, *г* (стр. 249) представлены коэффициенты линейной корреляции между социометрическим статусом (X_1), эмоциональной экспансивностью (X_3) и нейротизмом (X_2), полученные на второй выборке студентов ($n_2 = 57$). Проверить однородность этих корреляций с полученными на первой выборке (табл. 4.3.5, *б*).

В данном случае $s = 2$ и $L = 3$. Определив по табл. III Приложения 2 необходимые z_{ij}-преобразования, произведем вычисления по формуле (5.2.9). Все необходимые промежуточные и окончательные результаты представлены в табл. 5.2.6. Так как выборки однородны, корреляционную матрицу объединенной выборки объемом 99 человек получаем, выполнив по табл. IV Приложения 2 обратное преобразование средних z^*_{ijl} в коэффициенты корреля-

Таблица 5.2.7

Проверка однородности вектора коэффициентов корреляции (к примеру 5.2.6)

r_{ij}	z_{ijk}	$z_{ijk}-z^*_{ij}$	$(z_{ijk}-z^*_{ij})^2$
0,16	0,1614	0,2204	0,04857616
0,42	0,4477	0,0659	0,00434281
0,46	0,4973	0,1155	0,01334025
0,18	0,1820	0,1998	0,03992004
0,47	0,5101	0,1283	0,01646089
0,51	0,5627	0,1809	0,03272481
0,63	0,7414	0,3596	0,12931216
—0,20	—0,2027	0,5845	0,34164025
0,58	0,6625	0,2807	0,07879249
0,25	0,2554	0,1264	0,01597696
$r^*_{ij} = 0{,}36$	$z^*_{ij} = 0{,}3818$	Сумма: 0,72108682,	

$n = 23$, $\chi^2 = 20 \cdot 0{,}72108682 \approx 14{,}4$, $\nu = 9$,

$\chi^2_{0,05/9} = 16{,}9 > \chi^2 = 14{,}4$, т. е. можно принять гипотезу об однородности r_{ij}.

ции r_{ij} (они представлены в табл. 5.2.6): $r_{12} = -0{,}259$; $r_{13} = 0{,}220$; $r_{23} = -0{,}304$.

Пример 5.2.6. В примере 4.4.1 рассматривалась нормированная автокорреляционная функция случайной ошибки слежения. Чтобы установить, стационарна ли ошибка слежения как случайный процесс, надо проверить, зависят ли значения нормированной автокорреляционной функции от начала отсчета сдвига τ. Если

они не зависят от начала отсчета, то r_{ij}, лежащие на l-ной диагонали корреляционной матрицы (табл. 4.4.5), должны быть однородны. Проверим однородность коэффициентов r_{ij}, лежащих на первой диагонали (считая вверх и вправо от главной диагонали) табл. 4.4.5.

Так как число наблюдений n одинаково для всех $s = 10$ коэффициентов r_{ij}, то вычисление χ^2 произведем по формуле (5.2.10), полагая $\sum_{l=1}^{L} \acute{=} 1$, как показано в табл. 5.2.7. Можно видеть, что при данном числе наблюдений ($n = 23$) нет оснований отклонять гипотезу об однородности r_{ij}, вычисленных при одинаковых сдвигах τ, но разных началах отсчета τ. Следовательно, можно усреднять коэффициенты, вычисляя $\tilde{R}_{yy}$, как и сделано в табл. 4.4.5.

Мы рассмотрели основные аспекты применения χ^2-критерия к экспериментальным данным. Но он используется и для формирования многих параметрических критериев, которые и рассмотрим ниже.

5.2.3. **Основные параметрические критерии**

t-критерий Стьюдента

Если X — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией, равной единице, а независимая от нее случайная величина χ^2 имеет χ^2-распределение с ν степенями свободы, то случайная величина

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}} \qquad (5.2.10а)$$

имеет t-распределение Стьюдента с ν степенями свободы. Плотность этого распределения (рис. 5.2.4) зависит только от ν, имеет симметричную форму и при увеличении ν асимптотически стремится к нормальному распределению.

Квантили $t_{\alpha, \nu}$ распределения Стьюдента приведены для $\alpha = 0{,}05$, $0{,}01$ и $0{,}001$ в табл. VIII Приложения 2. Они используются для интервального оценивания и для проверки гипотез о случайности различия (сходства) любых параметров.

При интервальном оценивании квантиль $t_{\alpha, \nu}$ показывает, как указывалось выше (уравнение 5.1.5), на сколько стандартных погрешностей $\sigma(\theta)$ может отклоняться в меньшую и бо́льшую стороны выборочная оценка θ от значения параметра θ^* в генеральной совокупности. При интервальном оценивании любого из параметров θ^*, согласно классификации на рис. 5.1.1, поступают следующим образом.

По выборочной оценке θ и табл. 5.1.2 вычисляют оценку стандартной погрешности σ (θ). Вычисляют эмпирическое значение t-критерия:

$$t^{э} = \frac{\theta}{\sigma(\theta)} \qquad (5.2.11)$$

и по табл. VIII Приложения 2 находят для $\nu = n - 1$ (а при указанных в табл. 5.1.2 $n - 2$ или $n - 3$), ближайшее к $t^{э}$ снизу теоретическое значение квантиля $t_{\alpha,\nu}$, которое и принимается для указания границ доверительного интервала (с доверительной вероятностью $1 - \alpha$):

$$\theta^* = \theta \pm t_{\alpha,\nu}\sigma(\theta). \qquad (5.2.12)$$

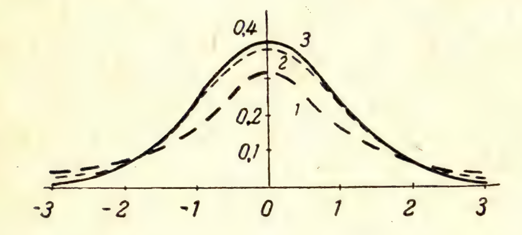


Рис. 5.2.4. Плотность t-распределения Стьюдента.

По оси ординат — плотность; по оси абсцисс — значения t; 1 — при $\nu = 1$, 2 — при $\nu = 5$, 3 — при $\nu = \infty$.

Важной разновидностью интервального оценивания является построение доверительной зоны (области) простой линейной регрессии $u^* = a_{u/z}z + a_{0u}$. Существо дела здесь состоит в следующем. Определяются доверительные значения среднего арифметического M (u):

$$\left.\begin{aligned} u_{\min} &= \mathrm{M}(u) - t_{\alpha,\nu}\cdot\sigma[\mathrm{M}(u)], \\ u_{\max} &= \mathrm{M}(u) + t_{\alpha,\nu}\cdot\sigma[\mathrm{M}(u)], \end{aligned}\right\}$$

а также доверительные значения углового коэффициента:

$$\left.\begin{aligned} a_{\min} &= a_{u/z} - t_{\alpha,\nu}\cdot\sigma(a_{u/z}), \\ a_{\max} &= a_{u/z} + t_{\alpha,\nu}\cdot\sigma(a_{u/z}), \end{aligned}\right\}$$

где стандартные ошибки определены формулами в табл. 5.1.2. Далее, как показано на рис. 5.2.5, через точки с координатами ($u_{\max}$; M [Z]) и ($u_{\min}$; M [Z]) проводят по две прямые, одну под углом α_1 к оси абсцисс, а другую — под углом α_2 так, чтобы $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = a_{\min}$ и $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = a_{\max}$ соответственно. В результате область, ограниченная заштрихованной на рис. 5.1.5 частью плоскости, и является доверительной зоной линии регрессии, в которой с вероятностью $1 - \alpha$ заключена регрессия, соответствующая генеральной совокупности.

При проверке гипотез о случайности (неслучайности) сходства (различия), в сущности, используют оценку вероятности совместного перекрытия (или неперекрытия) доверительных интервалов.

Пусть θ_1 и θ_2 — две выборочные оценки некоторого параметра θ^*. Тогда эмпирическое значение t-критерия вычисляется по формуле (5.2.11), в которой $\theta = |\theta_1 - \theta_2|$

$$t^э = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\sigma(|\theta_1 - \theta_2|)}, \qquad (5.2.13)$$

где $\sigma(|\theta_1 - \theta_2|)$ — стандартная погрешность разности выборочных оценок определяется по формулам из таблицы 5.1.2. Далее по числу степеней свободы $\nu = n - 1$ (или $n - 2$; $n - 3$) из табл. VIII Приложения 2 определяется квантиль $t_{\alpha,\nu}$, для которого либо $t^э \leqslant t_{0,05/\nu}$ и тогда принимается проверяемая «нулевая» гипотеза, либо $t^э > t_{0,01/\nu}$ и тогда принимается альтернативная гипотеза. В случае $t_{0,05/\nu} < t^э \leqslant t_{0,01/\nu}$ принимается решение увеличить число наблюдений.

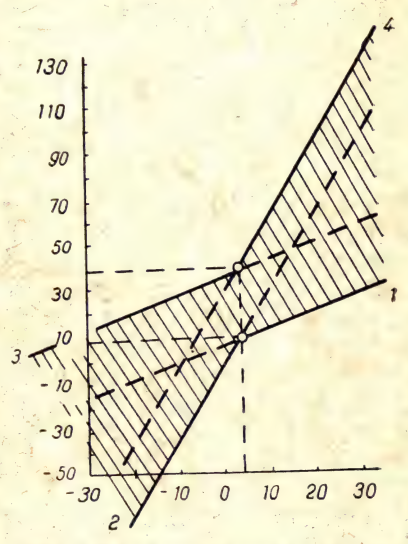


Рис. 5.2.5. Доверительная область (заштрихована) линии регрессии ($1 - \alpha = 0,999$) к примеру 5.2.8.

По оси абсцисс — статус в своей группе (x), по оси ординат — статус на курсе (y) в %; 1 — при $[M(Y)]_{min}$ и $[a_{y/x}]_{min}$; 2 — при $[M(Y)]_{min}$ и $[a_{y/x}]_{max}$; 3 — при $[M(Y)]_{max}$ и $[a_{y/x}]_{min}$; 4 — при $[M(Y)]_{max}$ и $[a_{y/x}]_{max}$.

Специальным случаем проверки гипотез с помощью t-критерия является *оценка значимости* некоторого параметра, т. е. оценка достоверности отличия величины параметра от нуля. Такая постановка вопроса применяется к мерам асимметрии и эксцесса, к мерам детерминации и связи. При этом используется формула (5.2.11), а гипотеза проверяется так же, как и при оценке сходства (или различия). Заметим, что проверка значимости коэффициентов корреляции и регрессии составляет существо классического корреляционного и регрессивного анализа.

Пример 5.2.7. Определить доверительный интервал для вероятности записывания цифры «7» испытуемым (пример 1.1.2), если число наблюдений $n = 1300$, а частость p («7») $= 0,108$. По табл. 5.1.2 находим формулу для $\sigma(p)$:

$$\sigma(p) = \sqrt{\frac{(1-p)\,p}{n}} = \sqrt{\frac{0,108 \cdot 0,892}{1300}} \approx 0,00861.$$

По формуле (5.2.11) определяем:

$$t^э = 0,108 : 0,00861 \approx 12,5.$$

Из табл. VIII Приложения 2 можно видеть, что при $\nu = \infty$ $t_{0,01/\nu} = 2{,}58 < t$. Следовательно, по формуле (5.2.12) можем определить интервал:

$$0{,}108 - 2{,}58 \cdot 0{,}00861 \leqslant p\,(«7») \leqslant 0{,}108 + 2{,}58 \cdot 0{,}00861$$

$$\text{или } 0{,}086 \leqslant p\,(«7») \leqslant 0{,}130,$$

в котором с доверительной вероятностью 0,99 заключена вероятность появления цифры «7» в последовательности цифр, записываемых данным испытуемым.

Пример 5.2.8. В примере 3.3.3 для 42 студентов были определены линейная регрессия социометрического статуса на курсе (y) в зависимости от статуса в своей группе (x) : $y = 2x + 18$, а также безусловные средние арифметические М (Y) = 25 и М [X] = 3,34; стандартные отклонения $\sigma\,[Y] = 28{,}8$ и $\sigma\,[X] = 9{,}54$; коэффициенты линейной корреляции $r_{xy} = 0{,}63$ и нелинейной детерминации $\eta^2_{y/x} = 0{,}33$ и $\eta^2_{x/y} = 0{,}477$. Требуется проверить, удовлетворительна ли линейная аппроксимация регрессии «y по x», и, определив доверительные интервалы для М [Y] и $a_{y/x}$, установить доверительную область теоретической регрессии социометрического статуса на курсе в зависимости от статуса в своей группе.

Проверка удовлетворительности аппроксимации сводится к проверке значимости различий между наибольшим из коэффициентов нелинейной детерминации и квадратом коэффициента линейной корреляции:

$$\eta^2_{x/y} - r^2_{xy} = 0{,}477 - 0{,}397 = 0{,}08.$$

По табл. 5.1.2 находим, что в зависимости от числа условных средних М (x/y), из которых вычислялся коэффициент детерминации $\eta^2_{x/y}$ (их было 7), стандартная погрешность

$$\sigma\,(\eta^2_{x/y} - r^2_{xy}) = \sqrt{0{,}08 : 5} \approx 0{,}13.$$

По (5.2.11) вычисляем эмпирическое значение t-критерия:

$$t^э = (\eta^2_{x/y} - r^2_{xy}) : \sigma\,(\eta^2_{x/y} - r^2_{xy}) \approx 0{,}6,$$

что меньше любого наименьшего теоретического квантиля $t_{\alpha,\nu}$. Следовательно, гипотеза о линейности не отвергается (различия случайны).

Определим далее доверительные интервалы для М (Y) и $a_{y/x}$ и вычислим их минимальные и максимальные значения. Формулы стандартных погрешностей находим в табл. 5.1.2:

$$\sigma\,[\text{М}\,(Y)] = \sigma\,(Y) : \sqrt{n} = 28{,}8 : \sqrt{42} \approx 4{,}4,$$

$$\sigma\,(a_{y/x}) = \frac{\sigma\,(Y)}{\sigma\,(X)} \sqrt{\frac{1 - r^2_{xy}}{n-2}} = \frac{28{,}8}{9{,}54} \cdot \sqrt{\frac{1 - 0{,}397}{40}} \approx 0{,}366.$$

Тогда для $\nu = 40$ и $\alpha = 0{,}001$ из табл. VIII Приложения 2 определяем $t_{\alpha,\nu} = 3{,}55$ и по уравнениям (5.2.14 и 15) находим:

$$[M(Y)]_{\min} = 9{,}4, \quad [M(Y)]_{\max} = 40{,}6;$$

$$[a_{y/x}]_{\min} = 0{,}7, \quad [a_{y/x}]_{\min} = 3{,}3.$$

Чтобы построить доверительную область регрессии, нужно через точки с координатами (9,4; 3,34) и (40,6; 3,34) провести прямые с минимальными и максимальными угловыми коэффициентами. Проще всего поступить следующим образом. Найдем дополнительные точки, через которые пройдут искомые границы доверительной зоны. Так как $\operatorname{tg} \alpha = \Delta y : \Delta x = a_{y/x}$, то $\Delta y = \Delta x \cdot a_{y/x}$. Выберем координату по x для искомых точек: $x = 30$; тогда $\Delta x = 30 - M(X) = 26{,}66$ и, следовательно, координаты по y будут:

$$y_1 = [M(Y)]_{\min} + \Delta y_{\min} = 9{,}4 + 26{,}66\,[a_{y/x}]_{\min} = 28{,}1,$$

$$y_2 = [M(Y)]_{\min} + \Delta y_{\max} = 9{,}4 + 26{,}66\,[a_{y/x}]_{\max} = 88,$$

$$y_3 = [M(Y)]_{\max} = \Delta y_{\min} = 40{,}6 + 26{,}66\,[a_{y/x}]_{\min} = 59{,}3,$$

$$y_4 = [M(Y)]_{\max} + \Delta y_{\max} = 40{,}6 + 26{,}66\,[a_{y/x}]_{\max} = 128{,}6.$$

Через найденные точки с координатами $(y_1; x)$, $(y_2; x)$, $(y_3; x)$ и $(y_4; x)$ и точки «центров рассеивания» проводятся, как показано на рис. 5.2.5, «граничные» прямые. Ограниченная ими область (на рис. 5.2.5 заштрихована) и есть зона, в которой с доверительной вероятностью $1 - \alpha = 0{,}999$ располагается теоретическая регрессия. Заметим, что мы построили максимально широкую область. Ограничиваясь меньшей доверительной вероятностью, можно существенно сузить и доверительную зону регрессии. Но выбор доверительной вероятности — это не статистическая задача.

Пример 5.2.9. Осуществим элементарный анализ коэффициентов корреляции статуса на курсе (X_1), нейротизма (X_2) и эмоциональной экспансивности (X_3) в первой выборке объемом 42 человека и в объединенной выборке объемом 99 человек (см. пример 5.2.5). Будем считать коэффициент корреляции r_{ij} значимо отличным от нуля, если для его z_{ij}-преобразования справедливо, что

$$t = |z_{ij}| : \sigma(z_{ij}) > t_{0{,}01/n-1}.$$

Тогда, используя табл. 5.2.6, где приведены z_{ij} преобразования для рассматриваемых коэффициентов, вычисляем:

$$\sigma(z_{ij}) = 1 : \sqrt{42-3} \approx 0{,}16 \text{ — для всех } z_{ij},$$

$$t = |z_{12}| : 0{,}16 = 0{,}2342 : 0{,}16 \approx 1{,}46 < t_{0{,}01/40} = 2{,}70 \text{ — незначимо},$$

$$t = |z_{13}| : 0{,}16 = 0{,}3095 : 0{,}16 \approx 1{,}93 \text{ — незначимо},$$

$$t = |z_{23}| : 0{,}16 = 0{,}2448 : 0{,}16 \approx 1{,}53 \text{ — незначимо}.$$

Но для объединенной выборки оказывается:

$$\sigma(z_{ij}) = 1 : \sqrt{99-3} \approx 0,1 - \text{для всех } z_{ij},$$

$$t = |z^*_{12}| : 0,1 \approx 2,65 > t_{0,01/100} = 2,63 - \text{значимо},$$

$$t = |z^*_{13}| : 0,1 \approx 2,24 - \text{сомнительно},$$

$$t = |z^*_{23}| : 0,1 \approx 3,14 - \text{значимо}.$$

Можно видеть, что увеличение объема выборки приводит к тому, что статистически незначимые оценки превращаются в статистически значимые. Разумеется, это можно установить, лишь проводя дополнительные наблюдения. Таким образом, статистическая незначимость оценок при малом объеме выборок еще ни о чем не свидетельствует, кроме того, что необходимы дополнительные испытания.

Чтобы избежать значительных вычислений при проверке значимости коэффициентов в корреляционных матрицах высокого порядка, можно по квантилям t-распределения и z-преобразованию (прямому и обратному) заранее вычислить *критические значения* $r^*_{\alpha, n}$, с которыми сопоставляются эмпирические коэффициенты корреляции r_{ij} с целью проверки их значимости. Такие критические значения $r^*_{\alpha, n}$ для $\alpha = 0,05$ и $0,01$ и для $4 \leqslant n \leqslant 100$ приведены в табл. V Приложения 2. Аналогично критические значения $\rho^*_{\alpha, n}$ коэффициента ранговой корреляции Спирмена представлены для $5 \leqslant n \leqslant 40$ в табл. VI Приложения 2.

На использовании t-критерия Стьюдента основывается метод расчленения корреляционного графа на части, отличающиеся по степени тесноты корреляций. Такие части, как упоминалось выше, называются корреляционными плеядами. Следовательно, корреляционная плеяда — это некоторая часть исходного корреляционного графа (или, соответственно, — корреляционной матрицы), полученная удалением некоторых дуг и вершин.

Имеются два взгляда на содержательную интерпретацию корреляционных плеяд и несколько формальных методов их выделения из корреляционного графа. Согласно первому взгляду, корреляционная плеяда есть «пучок» переменных, относительно тесно коррелирующих друг с другом. Одна (или более) из переменных в пучке имеет наибольшее число тесных связей с остальными переменными и рассматривается как *индикатор*, обусловливающий связи внутри пучка.* Согласно второму взгляду, корреляционная плеяда — тоже «пучок» относительно тесно коррелированных переменных. Но причина этих корреляций находится вне данной системы переменных — это некоторая *латентная* переменная, влияние которой и проявляется в корреляциях преимущественно

---

* П. В. Терентьев. Метод корреляционных плеяд. Вестник ЛГУ, 1959, № 9.

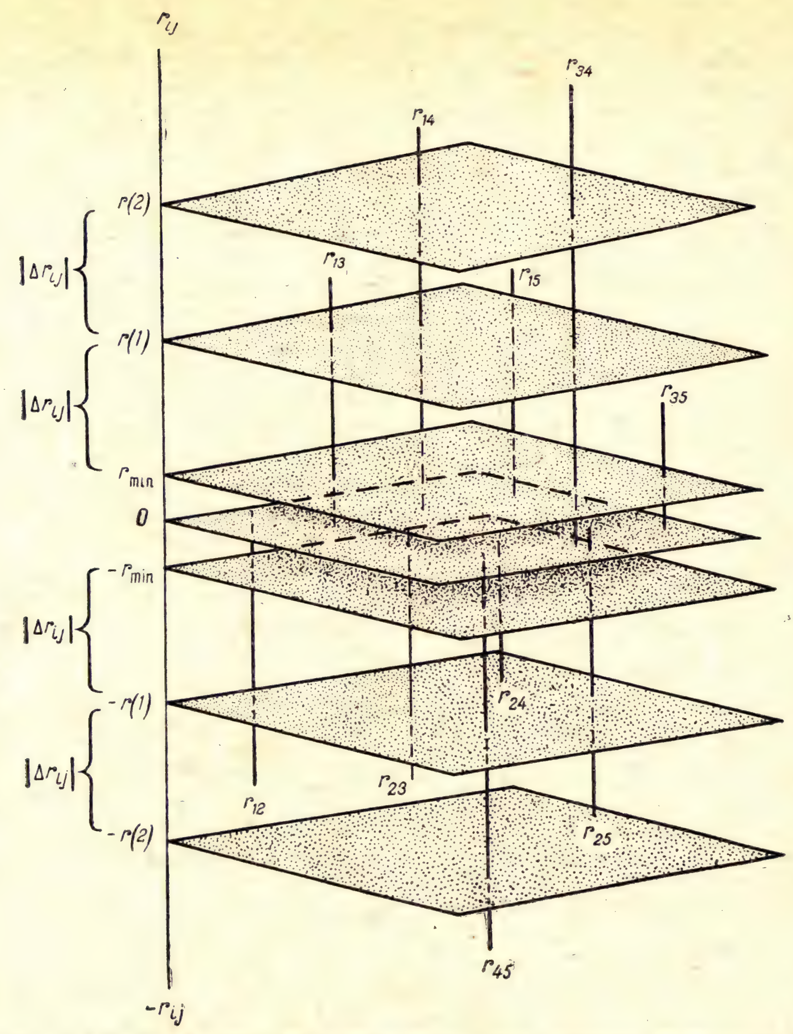


Рис. 5.2.6. Выделение корреляционных плеяд методом расслоения. $r(k)$ — секущие плоскости (границы слоев); $|\Delta r_{ij}|$ —«шаг» расслоения; r_{min}— минимальное значение коэффициента корреляции, достоверно отличающееся от нуля.

данного пучка.* Оба взгляда основываются на интерпретации факта парной корреляции либо как взаимодействия между самими коррелирующими переменными, либо как следствия их взаимодей-

* П. В. Терентьев. Дальнейшее развитие метода корреляционных плеяд. В сб.: Применение математических методов в биологии. Л., 1960; Э. М. Браверман. Методы экстремальной группировки параметров и задача выделения существенных факторов. «Автоматика и телемеханика». М., 1970, № 1; В. Я. Лумельский. Группировка параметров на основе квадратной матрицы связей. Там же.

ствия с некоторой неконтролируемой переменной (стр. 229). Нетрудно видеть, что эти взгляды не противоречат, а дополняют друг друга.

Из формальных методов выделения корреляционных плеяд наиболее распространены методы расслоения (срезов) и методы факторного анализа. Здесь мы рассмотрим методы расслоения.

Существо методов расслоения состоит в следующем. Величины коэффициентов парной корреляции r_{ij} можно изобразить, как показано на рис. 5.2.6, в виде перпендикуляров длиной r_{ij} к плоскости коррелируемых переменных X_iOX_j. Проводя секущие плоскости через Δr_{ij}, начиная от некоторой достоверно отличающейся от нуля величины $r_{\min}$, можно расслоить «тело» корреляций на s частей, корреляции «внутри» которых и образуются s плеяд. Так, для сечений, показанных в общем виде на рис. 5.2.6, выделяются шесть плеяд, которые в обычной форме корреляционных подграфов изображены на рисунке 5.2.7.

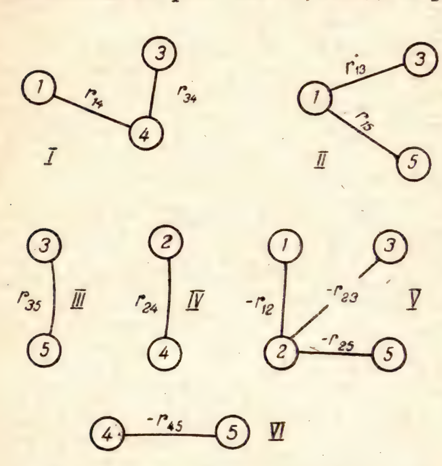


Рис. 5.2.7. Корреляционные плеяды, выделяемые по методу расслоения. I—при $r_{ij} > r(2)$; II—при $r(1) \leqslant r_{ij} < r(2)$; III — при $r_{\min} \leqslant r_{ij} < r(1)$; IV — при $-r_{\min} \geqslant r_{ij} > -r(1)$; V — при $-r(1) \geqslant r_{ij} > -r(2)$; VI — при $-r(2) \geqslant r_{ij}$.

Вместо расслоения можно проводить отслаивание плеяд, последовательно отсекая часть связей с r_{ij}, согласно неравенству $|r_{ij}| < |r(k)|$, так что остаются лишь переменные, все более и более тесно связанные, либо, наоборот, согласно неравенству: $|r_{ij}| > |r(k)|$, так что остаются переменные, все менее и менее тесно связанные. Заметим, что если расслоение рассматривать как аналог дифференциальной функции распределения, то отслаивание аналогично интегральной функции.

Существенным для техники выделения плеяд расслоением (или отслаиванием) является, во-первых, выбор начала отсчета $r_{\min}$, а во-вторых, определение «шага» $|\Delta r_{ij}|$. Очевидно, что нет смысла выделять статистически недостоверные плеяды. Следовательно, во-первых, выделять плеяды можно лишь из числа r_{ij}, значимо отличных от нуля, и, во-вторых, коэффициенты «соседних» плеяд должны неслучайным образом отличаться друг от друга. Поэтому началом отсчета плеяд должно быть критическое значение $r^*_{\alpha, n}$, как оно определено выше ($r_{\min} \equiv r^*_{\alpha, n}$), а «шаг» расслоения $|\Delta r_{ij}|$, очевидно, следует определять по уравнению (5.2.13).

Используя прямое (z) и обратное (z^{-1}) преобразования Фишера, можем определить для заданного объема выборки (n):

$$\left.\begin{aligned} |r_{\min}| &= |z_{\alpha\nu}|^{-1}, \text{ где} \\ |z_{\alpha,\nu}| &= t_{\alpha,\nu} : \sqrt{n-3}; \\ \nu &= n-1; \ \alpha \leqslant 0{,}01, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.14)$$

$$\left.\begin{aligned} |\Delta r| &= |\Delta z|^{-1}, \text{ где} \\ |\Delta z| &= |z_i - z_{i+1}| = t_{\alpha,\nu} \cdot \sqrt{\frac{2}{n-3}}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.15)$$

после чего границы слоев определяются формулами

$$r(1) = r_{\min} + \Delta r \ \text{ и } \ r(i+1) = r(i) + \Delta r. \qquad (5.2.16)$$

Очевидно, для фиксированного n можно статистически достоверно выделить лишь s корреляционных плеяд:

$$s = \operatorname{ant}\left\{ \frac{1 - |r_{\min}|}{|\Delta r|} - 1 \right\}, \qquad (5.2.17)$$

где ant $\{\ldots\}$ — знак округления до целого. Для удобства практического использования по формулам (5.2.14)—(5.2.17) вычислены для ряда n значения $r_{\min}$, $|\Delta r|$ и $r(i)$ при доверительной вероятности $1 - \alpha = 0{,}99$; они приведены в табл. XI Приложения 2.

Пример 5.2.10. В табл. 5.2.8. представлены интеркорреляции одиннадцати переменных, тестируемых по методике Векслера. Эти данные получены усреднением (через z-преобразование) восьми статистически однородных выработок по сто человек в возрасте от 18 до 25 лет, так что объем объединенной выборки ($n = 800$) позволяет достоверно выделить пять корреляционных плеяд.

Перед расслоением корреляционную матрицу целесообразно ранжировать. Для этого через z-преобразование в исходной матрице вычисляются средние значения коэффициентов корреляции каждой переменной со всеми остальными (десятью):

$$\mathrm{M}[r_{ij}] = (\mathrm{M}[z_{ij}])^{-1},$$

где

$$\mathrm{M}[z_{ij}] = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq 1}^{N-1} z_{ij}; \qquad (5.2.18)$$

N — порядок корреляционной матрицы; $(\ldots)^{-1}$ — символ обратного z-преобразования. Эти $\mathrm{M}[r_{ij}]$ показывают степень связи остальных $N-1$ переменных с i-той. Переставляя одноименные столбцы и строки исходной корреляционной матрицы в соответствии с убыванием рангов по $\mathrm{M}[r_{ij}]$, получаем *ранжированную*

Исходная корреляционная матрица к примеру 5.2.10 — *Таблица 5.2.8*

Переменные	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$M[r_{ij}]$	Ранг
1	1	0,537	0,438	0,623	0,282	0,647	0,371	0,485	0,371	0,363	0,336	0,454	1
2		1	0,310	0,551	0,291	0,508	0,273	0,485	0,371	0,273	0,273	0,363	4
3			1	0,345	0,291	0,405	0,300	0,318	0,345	0,291	0,282	0,336	7
4				1	0,273	0,572	0,318	0,422	0,310	0,318	0,291	0,414	3
5					1	0,354	0,254	0,216	0,236	0,207	0,149	0,254	11
6						1	0,345	0,405	0,336	0,345	0,282	0,430	2
7							1	0,310	0,388	0,254	0,245	0,310	9
8								1	0,397	0,363	0,388	0,363	5
9									1	0,388	0,430	0,345	6
10										1	0,336	0,310	8
11											1	0,300	10

Обозначения: 1 — общая осведомленность, 2 — понятливость, 3 — внимательность, 4 — способность к обобщению, 5 — непосредственное запоминание (на цифрах), 6 — уровень овладения родным языком, 7 — скорость овладения сенсомоторным навыком (кодирование символами), 8 — наблюдательность, 9 — комбинаторная способность (к анализу и синтезу), 10 — способность к организации частей в осмысленное целое, 11 — способность к эвристическому синтезу. $M[r_{ij}]$ — среднее значение коэффициента корреляции i-той переменной с остальными (j-тыми) переменными. Подчеркивания соответствуют элементам корреляционных плеяд, представленных на рис. 5.2.8 и 5.2.9.

Таблица 5.2.9

Ранжированная корреляционная матрица *

Ранг	Переменные	1	6	4	2	8	9	3	10	7	11	5	$M[r_{ij}]$
1	1	1	0,647	0,623	0,537	0,485	0,371	0,438	0,363	0,371	0,336	0,282	0,454
2	6		1	0,572	0,508	0,405	0,336	0,405	0,345	0,345	0,282	0,354	0,430
3	4			1	0,551	0,422	0,310	0,345	0,318	0,318	0,291	0,273	0,414
4	2				1	0,485	0,371	0,310	0,273	0,273	0,273	0,291	0,363
5	8					1	0,397	0,318	0,363	0,310	0,388	0,216	0,363
6	9						1	0,345	0,388	0,388	0,430	0,236	0,345
7	3							1	0,291	0,300	0,282	0,291	0,336
8	10								1	0,254	0,336	0,207	0,310
9	7									1	0,245	0,254	0,310
10	11										1	0,149	0,300
11	5											1	0,254

* *Контурами выделены достоверные слои, плеяды внутри которых представлены на рис. 5.2.8 и 5.2.9*

корреляционную матрицу (табл. 5.2.9), в которой корреляции преимущественно убывают слева направо и сверху вниз.

По табл. XI Приложения 2 для $n = 800$ находим значения r_{min} и границ $r(i)$ (см. подпись к рис. 5.2.8), после чего расслаиваем ранжированную корреляционную матрицу (табл. 5.2.9),

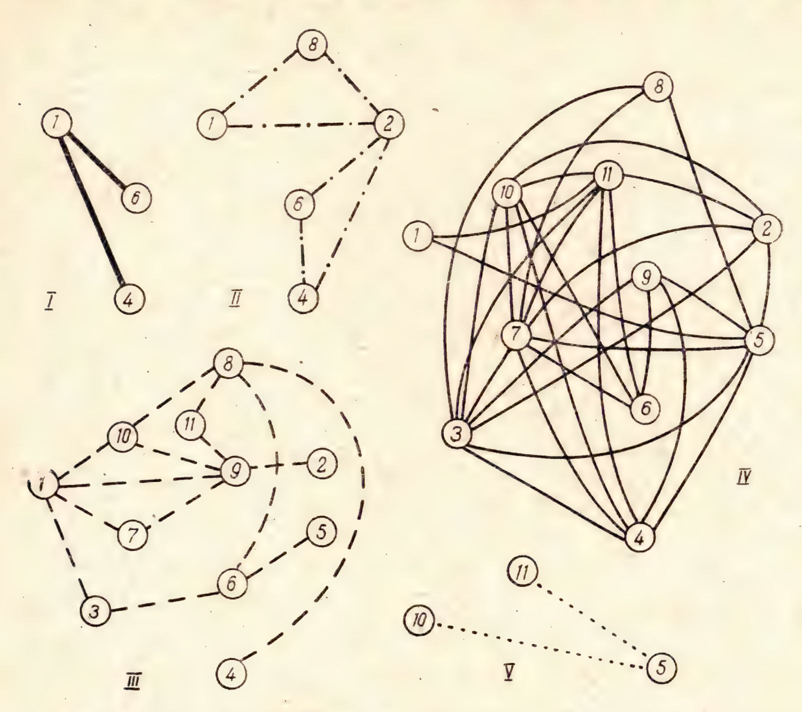


Рис. 5.2.8. Корреляционные плеяды, полученные расслоением матрицы интеркорреляций (табл. 5.2.9).

Плеяда I — при $0,607 \leqslant r_{ij}$ образована переменными с теснотой связей выше средней; плеяда II — при $0,478 \leqslant r_{ij} < 0,607$ соответствует переменным со средней теснотой связей; плеяда III — при $0,349 \leqslant r_{ij} < 0,478$ объединяет переменные с теснотой связей ниже средней; плеяда IV — при $0,220 \leqslant r_{ij} < 0,349$ соответствует слабо связанным переменным; плеяда V — при $0,091 \leqslant r_{ij} < 0,220$ объединяет весьма слабо, хотя и значимо, связанные переменные.

выделяя корреляционные плеяды внутри слоев (рис. 5.2.8), либо отслаиваем части корреляционной матрицы, выделяя объединения корреляционных плеяд для вышележащих слоев (рис. 5.2.9).

Содержательный анализ полученных плеяд выходит за пределы математической статистики. Но можно отметить два формальных показателя, способствующих содержательной интерпретации плеяд, согласно первому из двух взглядов, рассмотренных выше. Одним существенным формальным показателем служит *степень вершины*, т. е. число ребер, примыкающих к вершине. Перемен-

ная с наибольшим числом ребер выступает в качестве «ядра» плеяды и может рассматриваться как индикатор остальных переменных (данной плеяды). Например, на рис. 5.2.8 в плеяде I индикатором служит переменная 1, для плеяды II — переменная 2, для плеяды III — переменная 9. В плеяде IV четко выделяются два групповых «ядра»: одно из переменных 7,11, 10, а второе из переменных 3, 5, 4, причем «межъядерных» ребер больше, чем «внутриядерных», поэтому данную плеяду нельзя рассматривать как объединение двух разных плеяд — это целостное образование. Другим существенным формальным показателем служит *теснота связей*. Переменная может иметь меньше связей, но более тесных в одной плеяде и больше связей, но менее тесных в другой плеяде (например, переменная 4 в плеядах II и III на рис. 5.2.8).

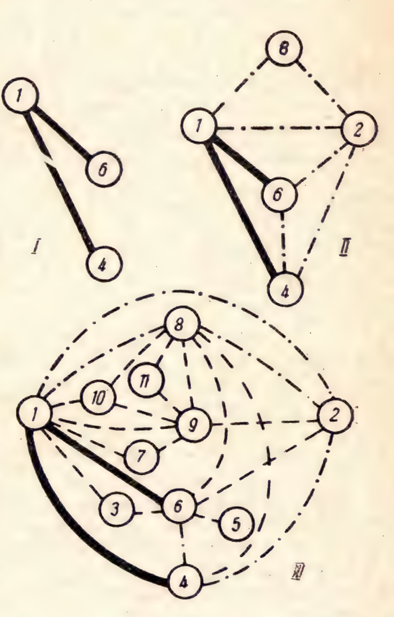


Рис. 5.2.9. Корреляционные плеяды, полученные отслаиванием.

Плеяда I — при $r_{ij} \geqslant 0{,}607$; плеяда II — при $r_{ij} \geqslant 0{,}478$; плеяда III — при $r_{ij} \geqslant 0{,}349$; плеяды IV и V не приведены из-за большого числа связей. Обозначения те же, что на рис. 5.2.8. Можно видеть, что плеяды, полученные отслаиванием, являют собой объединения соответствующих плеяд, полученных расслоением.

F-критерий Фишера

Если две случайные величины χ_1^2 и χ_2^2 имеют χ^2-распределения с числом степеней свободы ν_1 и ν_2 соответственно, причем выполняется неравенство

$$\chi_1^2 : \nu_1 > \chi_2^2 : \nu_2, \qquad (5.2.19)$$

то отношение

$$F = \frac{\chi_1^2 \cdot \nu_2}{\chi_2^2 \cdot \nu_1} \qquad (5.2.20)$$

зависит только от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 и имеет F-распределение с плотностью, показанной на рис. 5.2.10.

Квантили $F_{\alpha/\nu_1, \nu_2}$ рассматриваются как критические значения отношений величин вида (5.2.20) и служат для проверки статистических гипотез о сходстве (различии) двух дисперсий, о значимости коэффициентов детерминации, об однородности ряда средних арифметических значений. Для $\alpha = 0{,}05$; 0,01 и чисел степеней свободы ν_1 — для числителя формулы (5.2.20) и ν_2 — для ее знаменателя, доверительные значения квантилей F-распределения представлены в табл. IX Приложения 2.

Сравнение двух выборочных дисперсий осуществляется следующим образом. Вычисляют эмпирическое дисперсионное отношение ($F_э$):

$$F_э = \begin{cases} \dfrac{D_1}{D_2} \text{ при } \nu_1 = \nu_2 = n - 1, \\ \dfrac{D_1(n_2 - 1)}{D_2(n_1 - 1)} \text{ при } n_1 \neq n_2, \ \nu_1 = n_1 - 1 \ \nu_2 = n_2 - 1, \end{cases} \quad (5.2.21)$$

где всегда выбирается $D_1 > D_2$ и n_1 — объем выборки с D_1, а n_2 — объем выборки с D_2. Далее из табл. IX Приложения 2 выбирают квантиль $F_{\alpha/\nu_1, \nu_2}$ и проверяют условие: $F_э \leqslant F_{0,05/\nu_1, \nu_2}$ — дисперсии отличаются лишь случайным образом, или $F_э > F_{0,01/\nu_1, \nu_2}$ — отличия неслучайны.

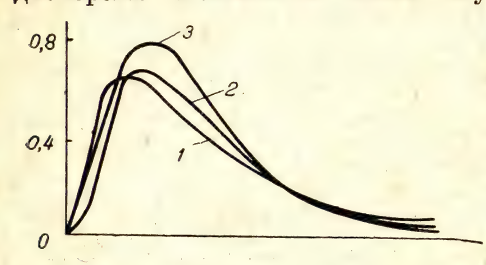


Рис. 5.2.10. Плотность F-распределения.

По оси ординат – плотность, по оси абсцисс – значения F. 1 — при $\nu_1 = \nu_2 = 6$; 2 — при $\nu_1 = 12$ и $\nu_2 = 6$; 3 — при $\nu_1 = 6$ и $\nu_2 = 60$.

Значимость коэффициентов детерминации типа $\eta^2_{u/z}$, $\eta^2_{i.23\ldots N}$ или r^2_{uz} и $R^2_{i.23\ldots N}$ можно проверять по t-критерию Стьюдента, рассмотренному выше. Но так как они, в сущности, представляют собой дисперсионные отношения, то считается лучшим проверять их значимость по F-критерию. Для любого из коэффициентов детерминации эмпирическое значение F-критерия находят следующим образом:

$$F_э = \frac{\eta^2(mn - m)}{(1 - \eta^2)(m - 1)}, \quad (5.2.22)$$

где η^2 — любой из перечисленных выше нелинейных (линейных), простых (множественных) коэффициентов детерминации, m — число переменных, исходя из которого вычислялся коэффициент детерминации η^2; n — число значений каждой переменной (одинаковое для всех переменных); mn — общее число всех наблюдений.*

Если вспомнить, что коэффициент нелинейной детерминации $\eta^2_{u/z}$ есть отношение дисперсии условных средних арифметических значений случайной величины U, при условии, что другая случайная величина Z принимает ряд из m фиксированных значений (стр. 181), то нетрудно понять смысл проверки однородности ряда

---

* Если число значений неодинаково для разных переменных, тогда вместо mn общее число наблюдений определяется как $\sum_{j=1}^{m} n_j$, где $j = 1, 2, \ldots, m$— номер случайной переменной, n_j — число наблюдавшихся ее значений.

средних арифметических значений. Пусть имеется m выборочных средних арифметических M_1, M_2, ... M_j ... , M_m и требуется установить, изменяются ли они от выборки к выборке (все равно, под действием контролируемых или неконтролируемых факторов). Тогда по методам, рассмотренным в главе 3, вычисляют общее среднее значение (M) этих средних арифметических, рассматриваемых в качестве условных средних:

$$M = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} n_j} \sum_{j=1}^{m} M_j n_j, \qquad (5.2.23)$$

и определяют их дисперсию относительно общего M:

$$D[M] = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} n_j} \sum_{j=1}^{m} M_j^2 n_j - M^2. \qquad (5.2.24)$$

Затем рассчитывают выборочные дисперсии D_j и среднее арифметическое из этих дисперсий:

$$D_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} n_j} \sum_{j=1}^{m} n_j D_j, \qquad (5.2.25)$$

после чего вычисляют эмпирическое значение F-критерия:

$$F_э = \frac{D[M] \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} n_j - m \right)}{D_0 (m-1)} \qquad (5.2.26)$$

и осуществляют проверку, аналогично тому, как показано выше для сравнения двух дисперсий. Если m средних M_j оказываются статистически неоднородными, следовательно, можно ожидать присутствия явной (при контролируемых) или неявной (при неконтролируемых факторах) регрессионной зависимости.

Пример 5.2.11. В примере 3.3.6 рассматривалась корреляционная взаимосвязь между статусом на курсе (y) и в своей группе (x). Были определены коэффициент детерминации $\eta^2_{y/x} = 0{,}33$ и условные средние арифметические значения статуса на курсе (см. табл. 3.3.9):

$$M_1 = -4; \quad M_2 = 24; \quad M_3 = 31; \quad M_4 = 52.$$

Требуется оценить, значима ли детерминация статуса на курсе статусом в группе, т. е. $\eta^2_{y/x} \geqslant 0$, и (что в данном случае то же самое) однородны ли четыре указанных выборочных средних арифметических значения.

По формуле (5.2.22) при $mn = 42$ и $m = 4$ получаем

$$F_э = \frac{0{,}33 \cdot (42-4)}{(1-0{,}33) \cdot (4-1)} \approx 6{,}2.$$

Аналогично по формуле (5.2.26) при $\sum_{j=1}^{m} n_j = 42$, $m = 4$ и вычисленных в примере 2.3.6 $\mathrm{D}\,[\mathrm{M}] \equiv \mathrm{D}\,[\mathrm{M}\,(y/x)] \approx 275{,}83$ и $\mathrm{D}_0 \equiv \mathrm{D}_0\,[y/x] \approx 563{,}47$, определяем

$$F_э = \frac{275{,}83 \cdot (42-4)}{563{,}47 \cdot (4-1)} \approx 6{,}2.$$

Заметим, что одинаковый результат получился потому, что формула (5.2.26) является частным случаем формулы (5.2.22).*

Для проверки гипотез о значимости $\eta^2_{y/x}$ и однородности четырех средних арифметических значений из табл. IX Приложения 2 для $\nu_1 = m - 1 = 3$ и $\nu_2 = mn - m = 38$ находим: $F_{0,01/3,40} = 4{,}31 < F_э = 6{,}2$. Следовательно, различия между средними не случайны, они должны считаться неоднородными; коэффициент детерминации статуса на курсе статусом в своей группе является значимым.

Если F-критерий используется для проверки однородности нескольких средних арифметических, то для проверки однородности более чем двух дисперсий его применять нельзя. Для проверки однородности нескольких выборочных дисперсий при выборках неравного объема используется критерий Бартлетта, а в случае одинакового объема — более простой критерий Кохрана.

Критерий Бартлетта

Пусть имеется m выборок, объемом n_j и с дисперсией D_j каждая. Тогда отношение B/C, где

$$\left.\begin{aligned} B &= 2{,}3026\left[\left(\sum_{j=1}^{m} n_j - m\right)\lg \mathrm{D} - \sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)\lg \mathrm{D}_j\right], \\ C &= 1 + \frac{1}{3(m-1)}\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} n_j - m}\right), \quad \mathrm{D} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} n_j}\sum_{j=1}^{m} n_j \mathrm{D}_j \end{aligned}\right\} \tag{5.2.27}$$

распределено приблизительно по χ^2-распределению с $m - 1$ степенями свободы, независимо от n_j лишь бы все $n_j \geqslant 5$. Следовательно, гипотеза об однородности всех D_j принимается, если

* Обе формулы приведены потому, что для проверки однородности нескольких выборочных средних не нужно вычислять η^2 и достаточно ограничиться формулой (5.2.26).

$B/C \leqslant \chi^2_{0,05/m-1}$, и отклоняется, если $B/C > \chi^2_{0,01/m-1}$. Из уравнений (5.2.27) можно видеть, что всегда $C > 1$, поэтому сначала вычисляют B и сопоставляют с критическим значением $\chi^2_{\alpha,\nu}$. Если $B \leqslant \chi^2_{\alpha,\nu}$, то гипотеза об однородности принимается, если же нет, то приходится вычислить C.

Пример 5.2.12.* От учеников шестого — одиннадцатого классов получены оценки по тесту «числовые ряды» (табл. 5.2.10). Требуется определить, изменяется ли дисперсия оценок при переходе от младших классов к старшим. Иначе говоря, нужно

Таблица 5.2.10

Исходные данные к примеру 5.2.12

	Классы					
	6	7	8	9	10	11
Оценки по тесту (x_{ij})	13,5	18,0	15,0	18,0	18,0	23,0
	9,5	13,0	18,5	19,5	19,5	18,5
	12,0	18,5	14,0	17,0	23,5	18,5
	14,0	13,5	15,0	14,5	16,5	16,5
	12,0	17,5	11,0	20,0	22,0	19,5
	10,0	11,0	15,0	19,0	19,0	18,5
	14,5	15,0	14,5	23,0	15,0	18,5
	15,5	13,0	13,0	22,0	19,5	21,5
	15,0	18,5	19,0	17,5	25,0	19,5
	12,0	16,5	15,0	13,0	15,5	16,5
	9,0	14,5	18,0	17,5	21,0	20,5
	14,5	11,5	16,5	19,5	20,5	17,5
	12,0	16,5	11,5	22,5	18,0	17,0
	18,5	14,0	13,5	15,5	20,0	21,5
	20,0	10,5	10,0	13,0	21,0	23,0
	14,5	16,5	13,5	17,0	17,5	18,0
	11,0	20,5	10,5	19,0	16,0	18,0
	9,0	16,5	13,5	19,0	22,0	22,0
	16,5	15,0	18,5	18,0	22,0	16,5
	12,5	13,5	14,5	21,0	20,5	19,5
	20,0	12,5	14,0	21,5	17,0	22,0
	14,0	14,0	18,0	17,0	20,0	22,5
	12,0	22,5	20,5	17,5	20,5	19,0
	11,5	16,5	13,0	20,5	16,5	—
	13,0	7,5	14,5	18,5	16,5	—
	14,0	—	19,0	—	20,0	—
	13,0	—	—	—	—	—
$S_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$	363,0	376,5	389,0	460,5	502,5	447,5
n_j	27	25	26	25	26	23

* См. G. Clauss, H. Ebner. Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. Berlin, 1967.

проверить однородность дисперсий по критерию Бартлетта. Промежуточные расчеты представлены в табл. 5.2.11.

Таблица 5.2.11

К расчету критерия Бартлетта при неравных объемах выборок

j	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2$	$\frac{S_j^2}{n_j}$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{S_j^2}{n_j}$	$n_j - 1$	D_j	$\lg D_j$	$(n_j - 1) \times \lg D_j$
1	5100,5	4880,3	220,2	26	8,47	0,9279	24,1254
2	5933,2	5670,1	263,1	24	10,96	1,0398	24,9552
3	6018,0	5820,0	198,0	25	7,92	0,8987	22,4675
4	8650,8	8482,4	168,4	24	7,02	0,8463	20,3112
5*	9874,8	9711,8	163,0	25	6,52	0,8142	20,3550
6	8807,8	8706,8	101,9	22	4,59	0,6618	14,5596
$\sum_{j=1}^{m}$	44385,1	43271,4	1113,7	$146 = m(n-1)$	45,48	—	126,7739

Общую дисперсию D можем определить либо по формуле (5.2.27), либо по формуле

$$D = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{S_j^2}{n_j} \right), \tag{5.2.28}$$

где обозначения приведены в табл. 5.2.10 и 5.2.11:

$$D \approx 7{,}63 \text{ и } \lg D = 0{,}8825.$$

Тогда по формуле (5.2.27)

$$B = 2{,}3026 \cdot (146 \cdot 0{,}8825 - 126{,}7739) \approx 4{,}77.$$

Из табл. VII Приложения 2 находим для $\nu = m - 1 = 5$:

$$\chi^2_{0,01/5} = 11{,}1 > B = 4{,}77,$$

следовательно, гипотеза об однородности дисперсий может быть принята.

G-критерий Кохрана

Кохран показал, что отношение максимально большой из выборочных дисперсий к сумме всех m сравниваемых дисперсий

$$G = \frac{\max D_j}{\sum_{j=1}^{m} D_j} \tag{5.2.29}$$

зависит только от m и от числа степеней свободы $\nu = n - 1$, где n — одинаковый объем выборок. В табл. X Приложения 2 приведены квантили G-распределения Кохрана, вычисленные для $\alpha = 0{,}05$ и $0{,}01$. Проверка гипотез осуществляется стандартным для всех критериев способом.

Пример 5.2.13.* Требуется сравнить три варианта метода преподавания (А, В и С), которые отличаются всего одним признаком — применением наглядного материала. Был проведен эксперимент, состоявший в том, что каждому из трех равных по объему случайных контингентов учеников из параллельных классов преподавание определенного учебного материала осуществлялось только по одному из указанных вариантов. В заключение была проведена контрольная работа, результаты которой оценивались в баллах. Первичные данные эксперимента представлены в табл. 5.2.12. Определим, однородны ли дисперсии оценок, полученных учениками, обучение которых проводилось с различным использованием наглядного материала.

Таблица 5.2.12

Исходные данные к примеру 5.2.13

	Метод А	Метод В	Метод С
Оценки в баллах (x_{ij}) ($i=1, 2, \ldots, n$) $n = 15$	9	15	18
	11	16	14
	10	15	17
	12	10	9
	7	13	14
	11	14	17
	12	15	16
	10	7	15
	13	13	16
	11	15	8
	13	15	14
	11	14	10
	10	11	16
	12	15	15
	13	10	17
S_j	165	198	216

Вычисляя любым известным способом дисперсии, получаем:

$$D_A = 2{,}7;\ D_B = 6{,}6;\ D_C = 9{,}4.$$

Определяем по уравнению (5.2.29)

$$G = \frac{9{,}4}{2{,}7 + 6{,}6 + 9{,}4} \approx 0{,}502.$$

* См. G. Clauss, H. Ebner. Ук. соч.

Из табл. X Приложения 2 для $m = 3$ и $\nu = 16$ (ближайшее большее, чем $\nu = 14$, значение) находим, что $G_{0,05} = 0,547 > G = 0,502$, т. е. дисперсии можно считать однородными.

§ 5.3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

Выше были рассмотрены методы проверки статистических гипотез с помощью специальных критериев. Однако наряду с «критериальными» методами в математической статистике имеются методы точечного и интервального оценивания, не использующие критериев в том виде, как это рассмотрено. К таким методам можно отнести метод максимального правдоподобия и метод Байеса — для точечного оценивания, классическую процедуру и последовательный анализ Вальда — для интервального оценивания.

5.3.1. Метод максимального правдоподобия

Этот метод, предложенный Р. Фишером, служит для точечной оценки любых параметров генеральной совокупности по выборке объемом n и состоит в следующем.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения известного вида, определяемую неизвестными параметрами θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_j, \ldots, \theta_N$, которые необходимо оценить по выборке значений $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, где n — объем выборки. Тогда вероятность появиться в выборке любому значению x_i зависит (для данного закона распределения) только от совокупности из N конкретных значений параметров θ_j; обозначим эту вероятность

$$p_i(x_i, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N). \qquad (5.3.1)$$

Вероятность совместного появления в выборке n наблюдавшихся значений x_i, обозначим ее

$$L\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i,\ \bigcap_{j=1}^{N} \theta_j\right), \qquad (5.3.2)$$

очевидно, является произведением вероятностей вида (5.3.1) и называется *функцией правдоподобия**:

$$L\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i,\ \bigcap_{j=1}^{N} \theta_j\right) = \prod_{i=1}^{n} P_i\left(x_i,\ \bigcap_{j=1}^{N} \theta_j\right). \qquad (5.3.3)$$

---

* Знак $\bigcap_{i=1}^{n}$ — это знак пересечения (логического умножения) всех элементов, от $i = 1$ по n. Аналогично знаку суммы $\sum_i$ и произведения $\prod_i$ он используется для сокращения записи.

Для упрощения вычислений на практике чаще используется логарифм функции правдоподобия

$$\log L = \sum_{i=1}^{n} \log P_i \left(x_i, \ \bigcap_{j=1}^{N} \theta_j \right), \qquad (5.3.4)$$

причем в зависимости от обстоятельств логарифмирование проводится в натуральных (ln), десятичных (lg) или двоичных ($\log_2$) логарифмах.

Смысл отыскания оценок для параметров θ_j состоит в том, чтобы принять в качестве оценок такие значения всех θ_j, при которых для выборочных значений x_i функции (5.3.3) или (5.3.4) обратились бы в максимум. Математически это задача отыскания экстремума функции многих переменных *, и в общем виде она не всегда может быть решена. К счастью для исследователей психологического, педагогического и других смежных профилей, для наиболее употребительных функций распределения и их параметров эта задача раз и навсегда решена, и можно пользоваться готовыми результатами. А именно, максимизация функции правдоподобия достигается при оценке вероятности частостью, при оценке моментов генеральной совокупности выборочными моментами и т. д., согласно приводившимся выше формулам. При этом все рассмотренные оценки состоятельны, в большинстве случаев эффективны и достаточны, но могут быть смещенными (см. табл. 5.1.1). Заметим также, что многие формулы рассмотренных выше критериев могут быть получены с использованием метода максимального правдоподобия. В частности, это формулы (5.2.6) и (5.2.9).** В качестве особой разновидности метода максимального правдоподобия можно рассматривать и метод оценки апостериорной вероятности гипотез, предложенный задолго до Р. Фишера английским священником Т. Байесом.

5.3.2. Метод Байеса

Особенностью этого метода является использование априорных вероятностей об истинности (или ложности) гипотез, для того чтобы на основе апостериорных оценок вероятностей событий, интересующих исследователя, оценить (в виде апостериорной вероятности) истинность и ложность гипотез, т. е. уточнить априорную информацию опытным путем.

Пусть P (И) и P (Л) — заранее известные (априорные) вероятности истинности и, соответственно, — ложности гипотез (табл. 5.1.3). Производя опыт, благодаря которому (апостериори)

---

* Отыскание экстремума функции N переменных заключается в том, что ее дифференцируют в частных производных по каждому из аргументов, получая N уравнений, которые приравнивают нулю и совместно решают. В результате и определяются значения оценок $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$.

** См. Р. Аткинсон, Г. Бауэр, Э. Кротерс. Введение в математическую теорию обучения. «Мир», М., 1969.

определяются условные вероятности P (П/И) — приема истинной и P (П/Л) — приема ложной гипотезы, можем оценить вероятность принятия истинной гипотезы

$$P(\text{ПИ}) = P(\text{И}) \cdot P(\text{П/И}) = P(\text{П}) \cdot P(\text{И/П}) \qquad (5.3.5)$$

и вероятность принятия ложной гипотезы

$$P(\text{ПЛ}) = P(\text{Л}) \cdot P(\text{П/Л}) = P(\text{П}) \cdot P(\text{Л/П}), \qquad (5.3.6)$$

где полная вероятность принять истинную или ложную гипотезу

$$P(\text{ПИ}) + P(\text{ПЛ}) = P(\text{П}). \qquad (5.3.7)$$

Тогда из равенств (5.3.5) и (5.3.7) можем определить *апостериорную вероятность истинности* принимаемой *гипотезы*:

$$P(\text{И/П}) = \frac{P(\text{И}) \cdot P(\text{П/И})}{P(\text{П})} = \frac{P(\text{И}) \cdot P(\text{П/И})}{P(\text{ПИ}) + P(\text{ПЛ})}. \qquad (5.3.8)$$

Аналогично из равенств (5.3.6) и (5.3.7) можем определить *апостериорную вероятность ложности* принимаемой *гипотезы*:

$$P(\text{Л/П}) = \frac{P(\text{Л}) \cdot P(\text{П/Л})}{P(\text{ПИ}) + P(\text{ПЛ})}. \qquad (5.3.9)$$

Заметим, что сумма левых — и, соответственно, правых частей равенств (5.3.8) и (5.3.9) равна единице, так как принятие истинной и принятие ложной гипотезы образуют полную группу событий.

Равенства (5.3.8) и (5.3.9) называются формулами апостериорных (условных) вероятностей принятия гипотез. Точно так же можно построить формулы для P (И/О) и P (Л/О) — апостериорных (условных) вероятностей отклонения гипотез. Все эти и подобные им формулы для произвольного числа гипотез известны под названием формулы Байеса:

$$P(H_i/\text{А}) = \frac{P(H_i) \cdot P(\text{А}/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{N} P(H_i) \cdot P(\text{А}/H_i)}, \qquad (5.3.10)$$

где H_i — i-тая принимаемая (отклоняемая) гипотеза; N — полная группа несовместимых гипотез; P (H_i/А) — апостериорная вероятность истинности (ложности) гипотезы H_i при условии опыта А; А — опыт, дающий информацию об истинности (ложности) i-той гипотезы; P (H_i) — априорная вероятность i-той гипотезы; P (A/H_i) — апостериорная вероятность принятия (отклонения) i-той гипотезы в опыте А; $\sum\limits_{i=1}^{N} P(H_i) \cdot P(\text{А}/H_i) = P(\text{А})$ — полная вероятность (см. стр. 36) принятия (отклонения) в опыте всех гипотез.

Поясним использование метода Байеса для частного случая проверки двух гипотез (или, что то же самое,— проверки истинности или ложности одной гипотезы) по формулам (5.3.8) и (5.3.9).

Пример 5.3.1. Согласно результатам многочисленных исследований, только около 80% людей пригодны к профессии оператора (летчик, диспетчер энергетического, химического и других производств и т. д.). Для отбора специалистов-операторов проводятся пробы на профессиональную пригодность. При этом, допустим, человека считают пригодным к данной операторской профессии, если он выполняет 95% проб (специальных заданий), и непригодным, если он выполняет только 50% проб. Таким образом, дано: гипотеза H_1 — пригоден и $P(H_1) = 0{,}8$; гипотеза H_2 — непригоден и $P(H_2) = 0{,}2$; апостериорные вероятности принять гипотезы: $P(\Pi/H_1) = 0{,}95$ и $P(\Pi/H_2) = 0{,}5$. Спрашивается, каковы вероятности $P(\text{Н}_1/\Pi)$ и $P(H_2/\Pi)$ того, что среди выполнивших 95% проб окажутся люди, действительно пригодные к профессии оператора и, соответственно, непригодные к ней?

Пользуясь формулой (5.3.8), определяем

$$P(H_1/\Pi) = \frac{P(H_1) \cdot P(\Pi/H_1)}{P(H_1) \cdot P(\Pi/H_1) + P(H_2) \cdot P(\Pi/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}95}{0{,}8 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}88.$$

Точно так же, пользуясь формулой (5.3.9), определяем

$$P(H_2/\Pi) = \frac{P(H_2) \cdot P(\Pi/H_2)}{P(H_1) \cdot P(\Pi/H_1) + P(H_2) \cdot P(\Pi/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}8 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}12.$$

Можно видеть, что действительно опыт позволяет уточнить априорную информацию. В этой связи допустим, что проведено новое испытание для людей, отобранных в первом опыте как профессионально пригодных. Пусть снова апостериорные вероятности $P(\Pi/\text{Н}_1) = 0{,}95$ и $P(\Pi/H_2) = 0{,}5$. Спрашивается, какова вероятность прошедшим и второе испытание оказаться пригодными к операторской деятельности?

Очевидно, целесообразно использовать информацию, полученную после первого испытания. Поэтому вместо априорных вероятностей $P(H_1) = 0{,}8$ и $P(H_2) = 0{,}2$ используем апостериорные вероятности гипотез $P(H_1/\Pi) = 0{,}88$ и $P(H_2/\Pi) = 0{,}12$. Тогда по формуле (5.3.10) вычисляем

$$P(H_1/\Pi,\ \Pi) = \frac{P(H_1/\Pi) \cdot P(\Pi/H_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i/\Pi) \cdot P(\Pi/H_i)} = \frac{0{,}88 \cdot 0{,}95}{0{,}88 \cdot 0{,}95 + 0{,}12 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}93.$$

Можем видеть, что благодаря новому опыту апостериорная вероятность принятия истинной гипотезы еще увеличилась. Заметим, однако, что увеличение после второго опыта оказалось

меньше, чем после первого опыта. Если бы последовательно проводились все новые и новые опыты, то искомая апостериорная вероятность увеличивалась бы, асимптотически приближаясь к единице как к своему пределу, при бесконечном увеличении количества опытов. Причем за каждое асимптотически уменьшающееся приращение апостериорной вероятности исследователю пришлось бы расплачиваться асимптотически увеличивающимся до бесконечности числом опытов. В этой связи возникают две существенных проблемы: первая — какое число наблюдений (опытов) необходимо и достаточно провести, чтобы определить искомый параметр (функцию) с требуемой степенью точности? и вторая — как можно распорядиться последовательным накоплением информации от опыта к опыту, чтобы по возможности уменьшить число наблюдений?

5.3.3. **Классический метод определения параметра (функции) с заданной точностью**

Пусть требуется по выборке объемом n оценить параметр θ^* с априори задаваемой точностью. Мерой точности является *относительная ошибка* (первого рода) α, которую, как обычно, полагают $\alpha = 0{,}05$, или $\alpha = 0{,}01$, где

$$\alpha = \frac{\theta - \theta^*}{\theta^*}; \qquad (5.3.11)$$

θ — выборочная оценка параметра θ^*.

Мерой точности также является и *абсолютная ошибка* (Δ):

$$\Delta = |\alpha \cdot \theta^*| = |\theta - \theta^*|. \qquad (5.3.12)$$

В соответствии с определением доверительного интервала по формулам (5.1.5) и (5.2.12) абсолютная ошибка Δ определяется следующим образом:

$$\Delta = \sigma(\theta^*) \cdot t_{\alpha, \nu}, \qquad (5.3.13)$$

где $\sigma(\theta^*)$ — стандартная погрешность параметра, определяемая формулами из табл. 5.1.2. В частности, для среднего арифметического значения $M[X]$:

$$\sigma[M(X)] = \frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}}, \qquad (5.3.14)$$

где $\sigma[X]$ — стандартное отклонение, определенное на выборке объемом n.

Подставляя (5.3.14) в (5.3.13) и преобразуя, получим

$$n = \frac{1}{\Delta^2}\sigma^2[X] \cdot t^2_{\alpha, \nu_{max}}, \qquad (5.3.15)$$

где Δ — заданная исследователем абсолютная ошибка определения среднего арифметического значения по формуле (5.3.12)

при условии выбранного по (5.3.11) значения α; $t_{\alpha, \nu_{max}} = 1{,}96$, если $\alpha = 0{,}05$ и $t_{\alpha, \nu_{max}} = 2{,}58$, если $\alpha = 0{,}01$; $\sigma^2 [X] \equiv D [X]$ — выборочная дисперсия; n — объем выборки, необходимый и достаточный для оценки среднего арифметического с точностью до α.

Пример 5.3.2. Известно, что для любого субтеста шкалы Векслера (тип WAIS), среднее арифметическое значение шкальной оценки M = 10, а дисперсия D = 9. Определим число наблюдений, необходимое для оценки среднего арифметического значения для любого субтеста этой шкалы выборочным путем, чтобы относительная ошибка не превышала 5% (т. е. чтобы $\alpha = 0{,}05$).

Абсолютная ошибка по формуле (5.3.12) равна: $\Delta = 0{,}05 \cdot 10 = 0{,}5$ (шкальной оценки). Тогда по формуле (5.3.15) находим

$$n = \frac{9 \cdot 1{,}96^2}{0{,}5^2} \approx 139.$$

Следовательно, необходимо и достаточно иметь в выборке 139 человек.

Аналогичным путем из формулы (5.3.13), подставляя в нее соответствующую формулу стандартной погрешности искомого параметра (нужная формула выбирается из табл. 5.1.2) и преобразуя, находят формулу объема выборки, необходимого и достаточного для оценки искомого параметра с заданной ошибкой α. Например, требуется оценить вероятность P, пользуясь частостью p. Дисперсия ошибки $\sigma^2 (p) = p (1 - p) : n$, следовательно, по (5.3.15) получаем для $\alpha = 0{,}05$

$$n = \frac{(1-p)\, t^2_{\alpha/\infty}}{\alpha^2 p}, \qquad (5.3.16)$$

где p — предварительно оцененная по выборке частость.

Пример 5.3.3. В примерах 1.1.2 и 5.2.7 рассматривалась оценка вероятности появления цифры «7» при свободном записывании цифр испытуемым. Частость p («7») = 0,108 при объеме выборки 1300. Спрашивается, какой нужен был бы объем выборки, чтобы определить вероятность P («7») с ошибкой в 5%? в 10%?

Для $\alpha = 0{,}05$ по формуле (5.3.16) находим:

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot (1 - 0{,}108)}{0{,}0025 \cdot 0{,}108} \approx 12\,691 \text{ (наблюдений)}.$$

Аналогично для $\alpha = 0{,}1$, учитывая, что $t_{0,1/\infty} = 1{,}645$, находим:

$$n = \frac{1{,}645^2 \cdot (1 - 0{,}108)}{0{,}01 \cdot 0{,}108} \approx 2235 \text{ (наблюдений)}.$$

Таким образом, при $n = 1300$ частость p («7») = 0,108 измерена более, чем с 10%-ной относительной ошибкой.

Рассмотренный классический метод фактически создан для случайных выборок из однородных совокупностей. Как же определить объем выборки из гетерогенной совокупности? Если априори

известно распределение вероятностей элементов гетерогенной совокупности, то в соответствии с классической процедурой можно осуществить типический отбор (по схеме независимых испытаний) следующим образом.

Будем рассматривать гетерогенные совокупности, как объединения гомогенных частей. Тогда *простая* гетерогенная совокупность рассматривается как состоящая из непересекающихся гомогенных частей (рис. 5.3.1, *а*), а *сложная* — как состоящая из пересекающихся или пересекающихся и непересекающихся частей (рис. 5.3.1, *б*).

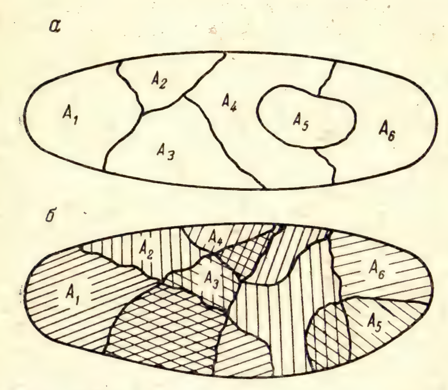


Рис. 5.3.1. **Гетерогенные совокупности.**

а — простая гетерогенная совокупность есть объединение своих непересекающихся частей: $A \equiv A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$; *б* — сложная гетерогенная совокупность есть объединение своих непересекающихся и пересекающихся частей: $A \equiv A_1 + A_1A_3 + A_2 + A_2A_3 + A_2A_5 + A_4 + A_4A_3 + A_5 + A_6$.

Пусть простая гетерогенная совокупность состоит из s гомогенных частей, вероятности появления которых P_i, где $i = 1, 2, \ldots, s$, известны и в сумме равны единице (s — это полная группа событий). Тогда из определения величины t-критерия Стьюдента по формуле (5.2.10а) следует:

$$t^2 = \frac{z^2}{\chi^2/\nu} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\chi^2}{z^2} t^2.$$

Полагая $\nu = n_i$; $z^2 = \Delta^2 = \alpha^2 P_i^2$ и $\chi_i^2 = P_i(1 - P_i)$, получаем для оценки i-той вероятности:

$$n_i = t^2_{\alpha, \nu_{\max}} \cdot (1 - P_i)/\alpha^2 P_i$$

и для всех s вероятностей:

$$N = \sum_{i=1}^{s} n_i = t^2_{\alpha, \nu_{\max}} \sum_{i=1}^{s} \frac{1 - P_i}{\alpha^2 P_i}, \tag{5.3.17}$$

где n_i полностью соответствуют уравнению (5.3.16), введенному раньше.

Аналогично рассуждая, можем рассматривать сложную гетерогенную совокупность как состоящую из s частей, повторяемых m раз, т. е. как матрицу с s строками и m столбцами, имеющую всего $L = ms$ пересечений. Тогда

$$N = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} n_{ij} = t^2_{\alpha, \nu_{\max}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \frac{1 - p_{ij}}{\alpha^2 \cdot p_{ij}}, \tag{5.3.18}$$

где p_{ij} — выборочная частость ij-того пересечения; $n_{ij} = p_{ij}N$ — частота ij-того пересечения, необходимая и достаточная для оценки вероятности P_{ij} с ошибкой не больше α; n_{ij} рассматривается так же как объем случайной выборки из части гетерогенной совокупности с пересечением множества фиксированных свойств; N — общий объем репрезентативной типической выборки, необходимый и достаточный для оценки многомерного распределения вероятностей изучаемой гетерогенной совокупности.

Пример 5.3.4. В примере 5.2.3 было получено объединенное совместное распределение статуса (X_1), нейротизма (X_2) и эмоциональной экспансии (X_3), полученное на выборке в 99 человек (табл. 5.2.5). Спрашивается, какой объем выборки требуется для оценки этого распределения с ошибкой не более 5%?

Пользуясь частостями p_{ijm} из табл. 5.2.5. и формулой (5.3.18), осуществим вычисления, как показано в табл. 5.3.1. Результат, на первый взгляд, представляется ошеломляющим: $N \approx 260\,400$ наблюдений. Однако иного и быть не может, так как дело идет об определении функции многомерного распределения, которое, как указывалось, из опыта определять нелегко именно по причине необходимости очень больших объемов выборки. Покажем, что для оценки отдельного параметра многомерной совокупности требуются всегда выборки меньшего объема. *

Пример 5.3.5. В разделе 4.3.2, оценивая количественные характеристики трехмерной системы случайных величин, мы

Таблица 5.3.1

Вычисление объема выборки из сложной гетерогенной совокупности
(к примеру 5.3.4)

Код p_{ijm}	Величина p_{ijm}	$1-p_{ijm}$	$0{,}0025 \cdot p_{ijm}$	$\frac{1-p_{ijm}}{0{,}0025 \cdot p_{ijm}}$	n_{ijm}
p_{111}	0,03	0,97	0,000075	12 933,3	7812
p_{112}	0,10	0,90	0,000250	3600,0	26 040
p_{121}	0,04	0,96	0,000100	9600,0	10 416
p_{122}	0,02	0,98	0,000050	19 600,0	5208
p_{211}	0,05	0,95	0,000125	7600,0	13 020
p_{212}	0,45	0,55	0,001125	488,9	11 7180
p_{221}	0,03	0,97	0,000075	12 933,3	7812
p_{222}	0,28	0,72	0,000700	1028,6	72 912
Суммы				67784,1	26 0399

$$N = 1{,}96^2 \cdot 67784{,}1 \approx 260\,399; \qquad n_{ijm} = p_{ijm}N$$

* По той простой причине, что отдельный параметр является неполной количественной характеристикой совокупности, как мы всегда это подчеркивали.

установили, что при выборке в 42 человека средние арифметические значения и дисперсии статуса на курсе (X_1), нейротизма (X_2) и эмоциональной экспансивности (X_3) соответственно равны:

$$M(X_1) = 3{,}34;\ M(X_2) = 13{,}2;\ M(X_3) = 8{,}9;$$

$$D(X_1) = 91;\ D(X_2) = 24;\ D(X_3) = 404.$$

Спрашивается, какого объема следует взять выборку, чтобы оценить средние арифметические значения статуса, нейротизма и экспансивности с ошибкой, не большей $\alpha = 0{,}05$?

Сначала вычислим по выборочным данным абсолютные ошибки и их квадраты:

$$\Delta[M(X_1)] = 0{,}05 \cdot 3{,}34 = 0{,}167; \quad \Delta_1^2 = 0{,}167^2 \approx 0{,}028;$$

$$\Delta[M(X_2)] = 0{,}05 \cdot 13{,}2 = 0{,}66; \quad \Delta_2^2 = 0{,}66^2 \approx 0{,}44;$$

$$\Delta[M(X_3)] = 0{,}05 \cdot 8{,}9 = 0{,}445; \quad \Delta_3^2 = 0{,}445^2 \approx 0{,}2.$$

Теперь, учитывая выборочные дисперсии, по формуле (5.3.15) определяем

$$N_1 = \frac{91 \cdot 1{,}96^2}{0{,}028} \approx 12486{,}5 \approx 12487,$$

$$N_2 = \frac{24 \cdot 1{,}96^2}{0{,}44} \approx 209{,}6 \approx 210,$$

$$N_3 = \frac{404 \cdot 1{,}96^2}{0{,}2} \approx 7760.$$

Можно видеть, во-первых, что, действительно, для оценки среднего арифметического (отдельного параметра) нужно почти в двадцать раз меньше опытов, чем для оценки трехмерного распределения (предыдущий пример). Во-вторых, чем меньше величина оцениваемого параметра по сравнению с дисперсией, тем больше требуется опытов для оценки с заданной точностью. В нашем случае фактически требуется исследовать максимально $N_1 = 12\,487$ человек. При этом остальные переменные (X_2 и X_3) будут в среднем измерены с более высокой, чем X_1, степенью точности. Если же попытаться сэкономить в числе опытов, ориентируясь на минимальное $N_2 = 210$, тогда среднее арифметическое $M[X_1]$ окажется оцененным с весьма большой ошибкой:

$$\alpha[M(X_1), N_1 = N_2] = \Delta_1 : M(X_1) = \sigma[M(X_1), N_1 = N_2] : M(X_1) =$$

$$= \frac{1}{3{,}34} \cdot \sqrt{\frac{91}{210}} \cdot 1{,}96 \approx 0{,}4.$$

Таким образом, чтобы добиться измерения одноименных параметров для нескольких разнородных случайных величин с точностью не меньше заданной, необходимо делать выборку максимального объема (из числа требуемых).

Как показано, классический метод определения необходимого и достаточного объема выборки зачастую приводит к очень большому числу требуемых наблюдений. Можно, однако, при определенной организации исследования, обойтись меньшим числом наблюдений, не проигрывая в точности. Такая организация достигается при изучении изменчивости средних арифметических средствами дисперсионного анализа (глава 6), а при проверке статистических гипотез относительно отдельных параметров — последовательной процедурой А. Вальда.

5.3.4. **Метод последовательной проверки статистических гипотез**

Этот метод, предложенный А. Вальдом, в настоящее время изучен лишь для некоторых законов распределения и применяется, главным образом, для оценки двух вероятностей и средних значений.* Существо последовательного (секвенциального) анализа состоит в следующем.

Вальд дополнил альтернативное поведение при классической проверке гипотез третьим исходом: продолжить испытания, если нет достаточных оснований принять одну из гипотез, и предложил использовать так называемое *отношение правдоподобия*, которое является отношением двух функций правдоподобия (5.3.3), одна из которых соответствует гипотезе H_0, а другая — альтернативной гипотезе H_1.

Пусть имеется некоторая выборка значений x_i случайной величины X $(i = 1, 2, \ldots, n)$, для которой известна плотность вероятности $f(x, \theta)$, зависящая от рассматриваемого параметра θ. Пусть, далее, проверяются гипотезы: H_0, состоящая в том, что $\theta = \theta_0$, и H_1, состоящая в том, что $\theta = \theta_1$. Тогда отношение правдоподобия в соответствии с (5.3.3) можно записать так:

$$L = \frac{P_1}{P_0} = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} \qquad (5.3.19)$$

или, в логарифмической форме:

$$\lg L = \lg P_1 - \lg P_0 = \sum_{i=1}^{n} [\lg f(x_i, \theta_1) - \lg f(x_i, \theta_1)]. \qquad (5.3.20)$$

Этот логарифм отношения правдоподобия вычисляется после каждого i-того испытания и сравнивается с *доверительными пределами*, которые определяются исходя из выбранных значений вероятностей ошибок первого (α) и второго (β) рода.

---

* Хотя в принципе может быть применен для сравнения любых двух параметров с известной функцией распределения, что требует, однако, специальной разработки.

Таблица 5.3.2

Формулы для определения границ областей поведения при проверке гипотез по методу последовательного анализа

Вид распределения	Угловой коэффициент k	Свободный член для гипотезы $H_0 : h_0$	Свободный член для гипотезы $H_1 : h_1$
Биноминальное (сравниваются две вероятности P_0 и P_1)	$\dfrac{\lg \dfrac{1-P_1}{1-P_0}}{\lg \dfrac{P_1}{P_0} - \lg \dfrac{1-P_1}{1-P_0}}$	$\dfrac{\lg \dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\lg \dfrac{P_1}{P_0} - \lg \dfrac{1-P_1}{1-P_0}}$	$\dfrac{\lg \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \dfrac{P_1}{P_0} - \lg \dfrac{1-P_1}{1-P_0}}$
Нормальное (сравниваются два средних арифметических)	$\dfrac{M_1(X) + M_2(X)}{2}$	$\dfrac{D(X)}{M_1(X) - M_0(X)} \cdot \lg \dfrac{\beta}{1-\alpha}$	$\dfrac{D(X)}{M_1(X) - M_0(X)} \cdot \lg \dfrac{1-\beta}{\alpha}$
Экспоненциальное $\left(\text{сравниваются два значения параметра } \lambda = \dfrac{M(X)}{D(X)}\right)$	$\dfrac{\lg \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_1 - \lambda_0}$	$-\dfrac{\lg \dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\lambda_1 - \lambda_0}$	$-\dfrac{\lg \dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\lambda_1 - \lambda_0}$

Во всех случаях подсчитывается $m = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s} x_{ij} \right)$, где для биномиального распределения $x_{ij} = \begin{cases} 0 — \text{если событие не появилось}, \\ 1 — \text{если оно появилось} \end{cases}$, для нормального и экспоненциального распределений x_{ij} — это наблюдаемое в ij-той группе из s опытов ($s \geqslant 1$) значение случайной величины X.

Доверительные пределы нетрудно найти по следующим соображениям. Если исходы проверки гипотез независимы, то условные вероятности принятия истинной и ложной гипотез, а также отклонения истинной и ложной гипотез равны (табл. 5.1.3.):

$$1 - \alpha = \beta, \tag{5.3.21а}$$

$$\alpha = 1 - \beta. \tag{5.3.21б}$$

Тогда из (5.3.21а) определяем *нижний предел*:

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \leqslant 1 \tag{5.3.22а}$$

и из (5.3.21б) определяем *верхний предел*:

$$1 \leqslant \frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{5.3.22б}$$

Логарифмируя эти пределы и сопоставляя их с величиной логарифма отношения правдоподобия на каждом i-том «шаге» последовательного анализа, осуществляем выбор поведения: если $\lg L \leqslant \lg [\beta/(1-\alpha)]$, то принимается гипотеза H_0, если $\lg L \geqslant \lg [(1-\beta)/\alpha]$, то принимается гипотеза H_1, если $\lg[\beta/(1-\alpha)] < \lg L < \lg [1-\beta)/\alpha]$, то продолжаются испытания — до тех пор пока не будет принята одна из двух проверяемых гипотез. При этом нет нужды каждый раз вычислять $\lg L$ и значения пределов. Специальными преобразованиями для основных функций распределения получены линейные уравнения для нижнего (m_0) и верхнего (m_1) пределов:

$$m_0(n) = h_0 + kn \text{ и } m_1(n) = h_1 + kn, \tag{5.3.23}$$

где n — последовательно увеличивающееся число испытаний, а значения k, h_0 и h_1 представлены в виде формул в табл. 5.3.2. С использованием этих формул последовательная процедура осуществляется следующим образом. Выбираются θ_0 и θ_1, как правило, по априорным соображениям. Затем выбираются α и β. Вычисляются k, h_0 и h_1. Далее по одному (или группами в s единиц) осуществляются испытания и для каждого i-того испытания ($i = 1, 2, \ldots, n$, или $i = s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots, s_n$) накапливается сумма

$$m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s} x_{ij} \right), \tag{5.3.24}$$

которая сопоставляется со значениями m_0 и m_1, вычисляемыми при $n = i$, как показано на рис. 5.3.2. Одна из гипотез принимается, как только точка с координатами $[m_i, i]$ пересечет одну из граничных линий.

Подробнее остановимся на ограничениях к использованию процедуры Вальда. Во-первых, последовательный анализ до сих пор хорошо разработан и доказан для сравнительно простых

однородных совокупностей, полученных в независимых испытаниях. Во-вторых, нужно быть уверенным в виде закона распределения совокупности. В-третьих, следует предварительно установить эффективность последовательной процедуры по сравнению с классической. Хотя Вальд показал, что при последовательной процедуре одна из гипотез будет в конце концов достоверно принята, все же число наблюдений может оказаться больше, чем при классической процедуре. Чтобы до опыта оценить эффективность последовательного анализа, необходимо, пользуясь априорными данными, определить число наблюдений, требуемое по классической процедуре (N), и число «шагов» последовательного анализа (ν).

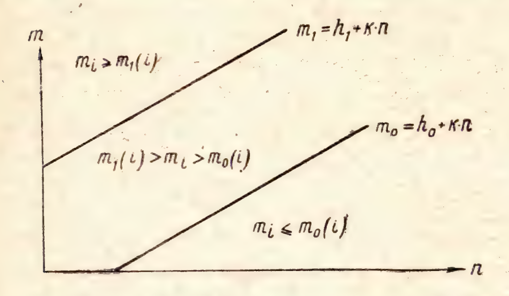


Рис. 5.3.2. Пояснение проверки гипотез при последовательном анализе.

n — число испытаний ($n \equiv i$); m определено в тексте формулой (5.3.24). Область $m_i < m_0$ (i) соответствует принятию гипотезы H_0, область $m_i \geqslant m_1$ (i) соответствует принятию гипотезы H_1, в середине между линиями границ — область продолжения испытаний.

Число шагов ν является случайной величиной, зависящей от степени «близости» гипотез (разница: $\theta_1 - \theta_0$), от величин α и β и от вероятности истинности (ложности) гипотез. На практике по априори выбранным α, β и соотношению значений параметров θ_0 и θ_1 оценивают математическое ожидание числа шагов, за которое окончится последовательный анализ: М (ν, H_0) — для принятия гипотезы H_0, если она истинна, М(ν, H_1) — для принятия гипотезы H_1, если она истинна, и М (ν) — в наихудшем случае, когда $\theta = 0{,}5\,(\theta_1 + \theta_0)$. Формулы для априорной оценки этих величин приведены в табл. 5.3.3.

Эффективность последовательного анализа оценивается по формуле

$$\text{Эф} = 1 - \text{М}\,(\nu) : N. \qquad (5.3.25)$$

Очевидно, что при Эф $>$ 0 последовательную процедуру стоит предпочесть классической, если позволяют ограничения. Заметим, что указанные выше ограничения снимаются, если исследование ведется с применением психометрических шкал и методов.*

Пример 5.3.6. При измерении интеллигентности взрослых с помощью вышеупомянутой шкалы Векслера получаемые оценки нормально распределены со средним арифметическим значением 100 единиц и стандартной ошибкой не более 2 единиц JQ. Для

* А. А. Генкин, В. А. Бодров. Применение одного статистического алгоритма разделения входных ситуаций на классы для определения профессиональной пригодности. «Вопросы психологии», 1967, № 1.

Таблица 5.3.3

Формулы для априорной оценки среднего числа шагов (ν) последовательной процедуры Вальда

Вид распределения	Для принятия «нуль»-гипотезы, если она истинна M (ν, H_0)	Для принятия «альтернативной» гипотезы, если она истинна M (ν, H_1)	В самом неблагоприятном случае M (ν)
Биномиальное распределение	$\dfrac{(1-\alpha)\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}+\alpha\cdot\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{P_0\lg\cdot\dfrac{P_1}{P_0}+(1-P_0)\cdot\lg\dfrac{1-P_1}{1-P_0}}$	$\dfrac{\beta\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}+(1-\beta)\cdot\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{P_1\lg\dfrac{P_1}{P_0}+(1-P_1)\cdot\lg\dfrac{1-P_1}{1-P_0}}$	—
Нормальное распределение	$\dfrac{(1-\alpha)\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}+\alpha\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{-\left[\dfrac{\mathrm{M}_1(X)-\mathrm{M}_0(X)}{\sigma(X)}\right]^2}$	$\dfrac{\beta\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}+(1-\beta)\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\left[\dfrac{\mathrm{M}_1(X)-\mathrm{M}_0(X)}{\sigma(X)}\right]^2}$	$\dfrac{-\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}\cdot\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\left[\dfrac{\mathrm{M}_1(X)-\mathrm{M}_0(X)}{\sigma(X)}\right]^2}=-\dfrac{h_0h_1}{\mathrm{D}(X)}$
Экспоненциальное распределение	$\dfrac{(1-\alpha)\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}+\alpha\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\lg\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}-\dfrac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_1}}$	$\dfrac{\beta\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}+(1-\beta)\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\lg\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}-\dfrac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_1}}$	$\dfrac{-\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}\cdot\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\left(\lg\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^2}=-h_0h_1\cdot\dfrac{(\lambda_1+\lambda_0)^2}{4}$

выборки из десяти восемнадцатилетних школьников (8 — 10-го классов) было установлено, что M $[IQ] = 98{,}7$ и D $[IQ] = 38$. Однако из предыдущих исследований известно, что у восемнадцатилетних взрослых $IQ > 100$. Спрашивается, сколько испытаний следует провести, чтобы проверить: H_0 — является ли средний уровень интеллигентности нормальным ($M_0 (IQ) = 100$) или H_1 — он значимо выше средней нормы ($M_1 (IQ) \geqslant 102$)?

Согласно классическому методу оценки параметра с заданной степенью точности, по формуле (5.3.15) находим при $\alpha = \beta = 0{,}05$:

$$N = \frac{38 \cdot 1{,}96^2}{2^2} \approx 37 \text{ (человек)}.$$

Для выполнения последовательного анализа вычислим логарифмы пределов:

$$\lg [\beta/(1-\alpha)] = \lg (0{,}05 : 0{,}95) \approx -1{,}2790;$$

$$\lg [(1-\beta)/\alpha] = \lg (0{,}95 : 0{,}05) = 1{,}2788.$$

Далее, по формулам из табл. 5.3.3 для нормального распределения получаем:

$$M(\nu, H_0) = \frac{0{,}95 \cdot (-1{,}279) + 0{,}05 \cdot 1{,}2788}{-\frac{4}{38}} \approx 11 \text{ (человек)},$$

$$M(\nu, H_1) = \frac{0{,}05\,(-1{,}279) + 0{,}95 \cdot 1{,}2788}{\frac{4}{38}} \approx 11 \text{ (человек)},$$

$$M(\nu) = \frac{1{,}279 \cdot 1{,}2788}{\frac{4}{38}} = \frac{-24{,}3 \cdot 24{,}3}{38} \approx 17 \text{ (человек)}.$$

Определяем для N и M (ν) эффективность последовательного анализа по формуле (5.3.25):

$$\text{Эф} = 1 - \frac{17}{37} \approx 0{,}54.$$

Следовательно, имеет смысл воспользоваться последовательным анализом.

По формулам из табл. 5.3.2. для нормального распределения вычисляем значения k, h_0 и h_1:

$$k = 0{,}5\,(102 + 100) = 101, \quad h_0 = \frac{38}{2} \cdot \lg \frac{0{,}05}{0{,}95} \approx -24{,}3,$$

$$h_1 = \frac{38}{2} \cdot \lg \frac{0{,}95}{0{,}05} \approx 24{,}3.$$

Таким образом, получаем уравнения границ:

$$m_0 = 101 \cdot n - 24{,}3; \; m_1 = 101 \cdot n + 24{,}3.$$

Таблица 5.3.4

Реализация последовательной процедуры к примеру 5.3.6.

$i=n$	x_i	$m_i=\sum_{i=1}^{n} x_i$	$m_0=101n-24{,}3$	$m_1=101n+24{,}3$
1	111	111	76,7	125,3
2	106	217	177,7	226,3
3	95	312	278,7	327,3
4	101	413	379,7	428,3
5	100	513	480,7	529,3
6	100	613	581,7	630,3
7	98	711	682,7	731,3
8	97	808	783,7	832,3
9	90	898	884,7	933,3
10	89	987	985,7	1034,3
11	113	1100	1086,7	1135,3
12	116	1216	1187,7	1236,3
13	117	1333	1288,7	1337,3
14	114	1447	1389,7	1438,3

Далее, не прибегая к графическому изображению, реализуем последовательное, по уравнению (5.2.24), накопление суммы m_i, вычисление значений границ $m_0(i)$ и $m_1(i)$ и их сопоставление, как показано в табл. 5.3.4. В результате уже при $n = 14$ оказывается, что $m_{14} > m_1(14)$ и, следовательно, можно принять гипотезу H_1 — уровень интеллигентности восемнадцатилетних старшеклассников больше среднего IQ шкалы Векслера.

В заключение отметим, что использование вместо «единичных» групповых наблюдений оказывается полезным для ускорения завершения последовательного анализа, но при этом неизбежен проигрыш в эффективности.

———

Глава 6

ОСНОВЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

§ 6.1. ПОНЯТИЕ О ДИСПЕРСИОННОМ АНАЛИЗЕ

Имеется несколько переменных факторов, которые либо классифицированы, либо упорядочены, либо, наконец, измерены. Требуется установить, влияют ли эти факторы на изучаемую переменную (СВ или СФ). Исследование влияния переменных факторов на изучаемую переменную по дисперсиям называется дисперсионным анализом (ДА).

6.1.1. Сущность дисперсионного анализа

Пусть изучается случайная величина X, о которой известно, что при определенном комплексе условий X имеет генеральную дисперсию $D_0\,[X]$. Требуется проверить, влияет ли на X некоторый фактор (условие) А, до сих пор не принимавшийся во внимание. Проводится серия наблюдений переменной X при условии А (при действии фактора А) в дополнение к предыдущему комплексу условий. В результате получаем выборку из n значений X: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, имеющую дисперсию $\mathrm{D}\,[X]$. Очевидно, что если фактор А не влияет на X, то $\mathrm{D}\,[X] = \mathrm{D}_0\,[X]$ — в идеальном случае. Практически это не так, но различие не должно превзойти случайного (с заданной степенью надежности), что легко определяется по F-критерию Снедекора — Фишера. Иначе говоря, при $\mathrm{D}\,[X] \approx \mathrm{D}_0\,[X]$ — в пределах случайных флюктуаций, можно считать, что либо фактор А не влияет на X, либо это влияние *несущественно* при данном объеме (n) выборки.

Если $\mathrm{D}\,[X] > \mathrm{D}_0\,[X]$, и это не случайно, то приходится признать, что фактор А влияет на переменную X. Тогда, считая действие фактора А независимым от других условий, можем написать:

$$\mathrm{D}\,[X] = \mathrm{D}_0\,[X] + \mathrm{D}_\mathrm{A}\,[X], \qquad (6.1.1)$$

где $\mathrm{D}_0\,[X]$ — дисперсия, обусловленная случайными влияниями неконтролируемых условий; $\mathrm{D}_\mathrm{A}\,[X]$ — дисперсия, характеризующая влияние фактора А на изучаемую переменную X.

Влияние фактора А на переменную X может быть различным. Здесь выделяются три случая. Первый случай: фактор А может влиять только на среднюю величину X, тогда D_A $[X]$ есть характеристика рассеивания средних значений переменной X под влиянием фактора А. Второй случай: фактор А влияет только на рассеивание значений X, т. е. на D_o $[X]$, тогда D'_A $[X]$ есть некоторая «добавка» к D_o $[X]$, выражающая степень влияния фактора А. Третий случай: фактор А влияет и на М $[X]$ и на D_o $[X]$, тогда D_A $[X]$ суммирует эти влияния.

Если имеет место второй или третий случай, то влияние фактора А можно учесть, применяя параметрические и непараметрические критерии, меры корреляции, уравнения регрессии. Если же имеет место первый случай, то, наряду с рассмотренными методами, применяют дисперсионный анализ. Иначе говоря, ДА используется лишь в первом случае. Его мы и будем рассматривать в этой главе.

Пусть теперь в дополнение к фактору А требуется испытать влияние фактора В. Здесь возможны два варианта: 1) факторы А и В независимы и 2) факторы А и В зависимы. Рассмотрим эти варианты отдельно.

1) Факторы А *и* В *независимы*. Проводится новая серия наблюдений над переменной X при условии, что кроме А на М $[X]$ действует фактор В. В результате получаем выборку из n значений переменной X, имеющую дисперсию $D^*[X]$. Очевидно, что

$$D^*[X] = D[X] + D_B[X], \qquad (6.1.2)$$

где D_B $[X]$ — доля дисперсии, обусловленная действием фактора В. Если влияние фактора В значимое (согласно F-критерию и принятому доверительному уровню), то член D_B $[X]$ существенно отличен от нуля. Подставляя (6.1.1) в (6.1.2), получаем для двух факторов А и В:

$$D^*[X] = D_o[X] + D_A[X] + D_B[X], \qquad (6.1.3)$$

где в левой части — общая дисперсия выборки, а в правой части члены $D_A[X]$ и $D_B[X]$ выражают долю рассеивания средних значений М $[X]$ переменной X под влиянием факторов А и В соответственно; член $D_o[X]$ выражает случайные флюктуации переменной под влиянием всех других (не А и не В) факторов (условий) опыта; этот член называется *остаточной дисперсией*.

Заметим, что в (6.1.2) член D $[X]$ выражал влияние (в общем случайное) всех других, кроме В, факторов (в том числе и А); это тоже остаточная дисперсия. Вообще *под остаточной дисперсией понимается часть общей дисперсии выборки, которая не входит в долю дисперсии по данному фактору или группе факторов.*

2) *Факторы* А *и* В *зависимы*. Тогда помимо трех слагаемых в правой части (6.1.3) появляется еще одно слагаемое:

$$D^*[X] = D_o[X] + D_A[X] + D_B[X] + D_{AB}[X]. \qquad (6.1.4)$$

Слагаемое D_{AB} $[X]$ выражает долю общей дисперсии $D^*[X]$, обусловленную совместным влиянием факторов А и В на математическое ожидание изучаемой переменной X.

Обобщим сказанное о двух факторах на произвольное количество факторов. Пусть на случайную переменную X с генеральной дисперсией D_0 $[X]$ влияет m факторов: $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Тогда, если эти факторы независимы попарно и в совокупности, то

$$D[X] = D_0[X] + D_{A_1}[X] + D_{A_2}[X] + \ldots + D_{A_m}[X], \quad (6.1.5)$$

где D $[X]$ — общая дисперсия выборки, полученной при воздействии указанных факторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$; D_0 $[X]$ — генеральная дисперсия, которую мы здесь принимаем за остаточную дисперсию.

Члены D_{A_i} $[X]$ (при $i = 1, 2, \ldots, m$) выражают парциальное действие соответствующих факторов на математическое ожидание переменной X. Если факторы попарно зависимы, то к (6.1.5) добавляются справа слагаемые, выражающие совместное действие всех возможных пар факторов; число таких слагаемых определяется числом сочетаний из m по 2. Если факторы к тому же зависимы по три, по четыре и так далее — по m, то добавляются еще члены, выражающие долю в общей дисперсии сочетаний факторов по три, по четыре и так далее.

На основе сказанного можно видеть, что общая дисперсия выборки, полученной при влиянии m факторов, определяется как дисперсия суммы $m + 1$ случайных величин (см. стр. 233), где дополнительная случайная величина отображает влияние *неучитываемых условий* (ей соответствует остаточная дисперсия). При этом для независимых факторов общая дисперсия есть *линейная* сумма факторных и остаточной (всего $m + 1$) дисперсий, а для зависимых (в общем случае) сюда добавляется сумма дисперсий всех факторных взаимодействий по два, по три и т. д. — по m.

Таким образом, сущность ДА состоит в том, чтобы представить общую дисперсию в виде суммы дисперсий, обусловленных влиянием контролируемых и неконтролируемых условий опыта и, оценивая дисперсионные отношения, определить меру влияния контролируемых условий (факторов) на средние значения изучаемой переменной.

6.1.2. Предпосылки дисперсионного анализа

Как мы видели, одной из предпосылок анализа дисперсий является использование F-критерия Снедекора — Фишера для проверки значимости влияния факторов. Поскольку F-критерий базируется на предположении о нормальном распределении генеральных совокупностей, из которых взяты выборки, то это обстоятельство весьма существенно для возможности применения рассматриваемого метода в целом. *Дисперсионный анализ следует*

применять только тогда, *когда известно (или доказано), что выборки нормально распределены.* Это первое важное условие грамотного применения ДА. В противном случае истинность выводов ничем не обоснована и не гарантируется.

Второй предпосылкой ДА является, как показано, *выделение факторных и остаточной дисперсий из общей дисперсии.* Чтобы это выделение было возможным, необходимо, чтобы остаточная дисперсия не изменялась от опыта к опыту под влиянием контролируемых или неконтролируемых факторов. В противном случае изменения остаточной дисперсии не позволят однозначно решить, что вносят в рассеивание средних данных контролируемые факторы. Поэтому, прежде чем применять дисперсионный анализ, необходимо убедиться в том, что дисперсия выборочных серий не меняется однонаправленно от серии к серии. Если такое изменение происходит, необходимо стабилизировать дисперсию*, и лишь потом применять ДА.

6.1.3. **Задачи дисперсионного анализа**

Основная задача ДА состоит в том, чтобы из произвольного числа факторов, могущих (как предполагается априори) влиять на изучаемую переменную, выделить *сравнительно небольшое* количество факторов, влияние которых наиболее существенно. Эта основная задача ДА, смотря по обстоятельствам, конкретизируется по-разному. В частности, иногда выделяют два этапа ДА. Первый связан с оценкой общего, недифференцированного влияния одного или нескольких факторов на среднее значение изучаемой переменной. Второй этап состоит в исследовании специфического, парциального действия факторов.

Оценка общего влияния факторов позволяет сравнительно быстро минимизировать первоначально обычно большое количество факторов. В результате первого этапа ДА многие из априори выбранных факторов отбрасываются как несущественные. Оставшееся небольшое количество факторов затем исследуется подробно, для того чтобы определить «вес» каждого из факторов и факторных комбинаций.

Таким образом, конкретизация основной задачи ДА может идти в трех направлениях: во-первых, *в оценке общего влияния одного или нескольких факторов*, во-вторых, *в оценке парциального влияния отдельных факторов и*, в-третьих, *в оценке парциального влияния различных комбинаций факторов.* Отметим, что последнее позволяет обоснованно осуществить выбор между линейной или нелинейной аппроксимациями регрессии.

До сих пор мы предполагали генеральную дисперсию $D_0 [X]$ известной и оценивали действие нового фактора, сравнивая две выборки: выборку с новым фактором и выборку без него. Но

---

* О методе стабилизации дисперссии см. в кн.: Е. И. Пустыльник. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. «Наука», М., 1968, стр. 167—168.

обычно имеется всего одна выборка, которая состоит из наблюдений, полученных при различных сочетаниях нескольких факторов, о влиянии которых отсутствует априорная информация. Требуется по этой выборке определить генеральную дисперсию и оценить парциальное и совместное действие всех исследуемых факторов. Тогда практически задача состоит в «расщеплении» общей дисперсии выборки на слагаемые, выражающие влияние факторов и остаточную дисперсию. После этого требуется проверить, значимо ли влияние факторов по отдельности и в комбинациях, и на основе результатов проверки отобрать факторные комбинации, существенно влияющие на исследуемую переменную, для их дальнейшего детального изучения.

6.1.4. Виды дисперсионного анализа

Планирование и проведение эксперимента, а также схема обсчета данных существенно зависят от числа исследуемых факторов, от количества градаций (уровней) каждого из них, от количества повторных (параллельных) испытаний, от того, все или только некоторые сочетания факторов на всех уровнях исследуются. В соответствии с этим выделяют следующие виды ДА.

В зависимости от количества факторов (k): однофакторный ($k = 1$), двухфакторный ($k = 2$), трехфакторный ($k = 3$) и т. д. — многофакторный (мультифакторный, при произвольном k) ДА.

В зависимости от количества градаций (m) каждого из факторов выделяют ДА на двух-, трех-, четырех- и т. д. уровнях. В этой связи обычно говорят об уровнях организации (планирования) k-факторного эксперимента, т. е. о ДА $k \cdot m$, где k — число факторов, а m — число их градаций. Обычно стремятся, чтобы m было для всех k одинаково. Это значительно упрощает ДА.

В зависимости от того, есть повторные испытания при каждом сочетании факторов на каждом уровне или они отсутствуют, выделяют ДА без повторных (параллельных) испытаний и ДА с повторными испытаниями. В последнем случае также стремятся, чтобы число повторных испытаний (n) для всех $k_i \cdot m_j$ было одним и тем же. Но в общем случае оно может быть переменным, и это несколько усложняет расчеты.

Наконец, в зависимости от того, все ли сочетания факторов на всех уровнях ($k_i \cdot m_j$) используются в исследовании или же часть таких сочетаний пропущена, выделяют полный факторный и дробный факторный ДА.

§ 6.2. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Здесь будем рассматривать принципиальную схему такого ДА, когда имеется всего один фактор А, исследуемый на произвольном количестве (m) уровней. При этом, в сущности, не важно, какие значения принимает фактор А на каждом из рассматриваемых

уровней, т. е. не важно, как эти уровни количественно определены, лишь бы это было недвусмысленно. Одним из уровней может быть и отсутствие фактора А. Рассмотрим два случая такого ДА: при одинаковом количестве параллельных испытаний на каждом из уровней и при разном их количестве.

6.2.1. Схема расчета при одинаковом количестве повторных испытаний

При одинаковом количестве параллельных испытаний мы имеем схему эксперимента $m \times n$, где m — число уровней фактора A_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, m$) и n — количество параллельных испытаний на каждом j-том уровне. Результаты этой схемы табулируются, как показано в верхней части табл. 6.2.1.

Таблица 6.2.1

Исходная таблица однофакторного ДА при одинаковом количестве повторных испытаний

	Уровни (j) фактора А ($j=1, 2, 3, \ldots, m$)					
	A_1	A_2	A_3	. . .	A_m	
Номера (i) повторных испытаний ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$): 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	. . .	x_{1m}	$N = m \cdot n$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	. . .	x_{2m}	
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	. . .	x_{3m}	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	. . .	x_{nm}	
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = S_j$	S_1	S_2	S_3	. . .	S_m	$\sum_{j=1}^{m} S_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$
$M[x_j] = \bar{x}_j$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	. . .	$\bar{x}_m$	$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j = M[x_{ij}]$
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i3}^2$	. . .	$\sum_{i=1}^{n} x_{im}^3$	$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$
$\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2 = S_j^2$	S_1^2	S_2^2	S_3^2	. . .	S_m^2	$\sum_{j=1}^{m} S_j^2 = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2$
$\frac{S_j^2}{n}$	$\frac{S_1^2}{n}$	$\frac{S_2^2}{n}$	$\frac{S_3^2}{n}$	. . .	$\frac{S_m^2}{n}$	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} S_j^2$

Прежде всего необходимо убедиться в стабильности дисперсий по уровням, применяя критерии Бартлетта или Кохрана. Если дисперсии нестабильны, их нужно стабилизировать. Дальнейшая процедура состоит в разложении общей дисперсии совокупности на части, соответствующие рассеиванию внутри уровней и между уровнями, т. е. надо определить в явном виде уравнение (6.1.1). Для этого необходимо вычислить и проанализировать соотношение определенных сумм квадратов, показанных в нижней части табл. 6.2.1.

Общая дисперсия выборки, показанной в табл. 6.2.1, определяется как

$$D[X] = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2. \qquad (6.2.1)$$

Разложим двойную сумму в формуле (6.2.1) на составляющие ее части, одна из которых выражает рассеивание внутри уровней (столбцов табл. 6.2.1), а другая — рассеивание между уровнями. Это разложение представлено следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + n \sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2. \qquad (6.2.2)$$

Преобразуя члены этого уравнения и вводя обозначения, получаем рабочие формулы для вычисления сумм квадратов отклонений:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right)^2, \\ Q_{\text{о}} &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right)^2, \\ Q_{\text{А}} &= n \sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.3)$$

Из уравнений (6.2.3) легко видеть, что *всегда*

$$Q = Q_{\text{о}} + Q_{\text{А}}. \qquad (6.2.4)$$

Теперь, чтобы получить соответствующие дисперсии, нужно равенство (6.2.4) почленно разделить на число степеней свободы. Но прежде чем идти дальше, нам придется разобраться в одной распространенной ошибке.

Создатель дисперсионного анализа Р. Фишер предложил вычислять дисперсии с учетом их числа степеней свободы, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}[X] &= \frac{Q}{mn-1}, \\ \mathrm{D_o}[X] &= \frac{Q_o}{m(n-1)}, \\ \mathrm{D_A}[X] &= \frac{1}{n}\left[\frac{Q_A}{m-1} - \frac{Q_o}{m(n-1)}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.5)$$

При таком расчете дисперсий общая дисперсия есть средняя арифметическая случайной и факторной дисперсий, взвешенных по числу степеней свободы:

$$\mathrm{D}[X] \overset{?}{=} \frac{mn-m}{mn-1}\mathrm{D_o}[X] + \frac{m-1}{mn-1}\mathrm{D_A}[X]. \qquad (6.2.6)$$

При $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$ дробные множители перед $\mathrm{D_o}\,[X]$ и $\mathrm{D_A}\,[X]$ в уравнении (6.2.6) *всегда меньше* единицы, т. е. всегда

$$\mathrm{D}[X] < \mathrm{D_o}[X] + \mathrm{D_A}[X],$$

и основное уравнение дисперсионного анализа — уравнение (6.1.1) — оказывается нарушенным. Заметим при этом, что общая дисперсия $\mathrm{D}\,[X] = \frac{Q}{mn-1}$ вычисляется правильно. Следовательно, по методике Фишера всегда получаются завышенные значения $\mathrm{D_o}\,[X]$ и $\mathrm{D_A}\,[X]$. К сожалению, методика расчетов по Фишеру излагается почти во всех руководствах по математической статистике *. Учитывая это, мы сначала будем рассматривать для примера метод Фишера, а затем излагать ДА так, чтобы основное уравнение (6.1.1) не нарушалось.

Результаты ДА всегда представляют в виде таблицы, где указаны: вид вариативности, значения сумм квадратов отклонений, согласно уравнениям (6.2.3), количества степеней свободы, оцениваемые дисперсии и (часто) — граничные значения F-критерия и доверительная вероятность.

Результаты ДА по методике Фишера представлены в табл. 6.2.2. В табл. 6.2.3 показаны результаты ДА по *исправленной* методике вычисления дисперсий. Можно видеть, что различия между этими методиками, как и указывалось, затрагивают только *способ* вычисления дисперсий и *порядок* проверки дисперсионного отношения, но не затрагивают основной процедуры расчета сумм квадратов отклонений.

---

* В. А. Авилов. Дисперсионный анализ. В кн.: Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации. «Наука», М., 1968.

Таблица 6.2.2

Табулирование результатов однофакторного ДА по методу Фишера при одинаковом количестве повторных испытаний на всех уровнях

Вид вариативности	Суммы квадратов отклонений	Кол-во степеней свободы	Средние квадратов отклонений	Оцениваемые компоненты дисперсии	Значение критерия
Между уровнями (факторная)	Q_A	$m-1$	$\frac{Q_A}{m-1}$	$nD_A[X]+$ $+D_o[X]$	$F=\frac{nD_A[X]+D_o[X]}{D_o[X]}$
Внутри уровней (остаточная)	Q_o	$mn-m=$ $=m(n-1)$	$\frac{Q_o}{m(n-1)}$	$D_o[X]$	
Общая	Q	$mn-1$	$\frac{Q}{mn-1}$	—	—

Таблица 6.2.3

Представление результатов однофакторного ДА по исправленному методу при одинаковом количестве повторных испытаний на всех уровнях

Вариативность	Суммы квадратов отклонений	Кол-во степеней свободы	Оцениваемая дисперсия	Значение критерия	Вероятность ошибки второго рода
Между уровнями (факторная)	Q_A	$mn-1$	$D_A[X]$	$F=\frac{D_o[X]+nD_A[X]}{D_o[X]}$	$\beta \leqslant 0{,}01$ или
Внутри уровней (случайная)	Q_o	$mn-1$	$D_o[X]$		$\beta \leqslant 0{,}05$
Общая	Q	$mn-1$	$D[X]$	(Не) Значимо	

Общее количество степеней свободы для вычисления всех дисперсий в табл. 6.2.3 одинаковое: $mn-1$. Тогда искомые дисперсии определяются следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} D_A[X] &= \frac{Q_A}{mn-1}, \\ D_o[X] &= \frac{Q_o}{mn-1}, \\ D[X] &= \frac{Q}{mn-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.7)$$

Легко видеть, что в уравнениях (6.2.7) сохранены равенства (6.1.1) и (6.2.4), тогда как по Фишеру сохранено лишь равенство (6.2.4), а основное равенство ДА (6.1.1) нарушено.

По Фишеру сначала определяют дисперсионное отношение оцениваемых компонент дисперсии, а затем вычисляют сами дисперсии (см. табл. 6.2.2). По исправленной методике ДА сначала непосредственно из сумм квадратов отклонений вычисляют выборочные оценки дисперсий и лишь потом рассчитывают дисперсионное отношение непосредственно через $D_A[X]$ и $D_o[X]$, вычисленные по формулам (6.2.7). При этом, естественно, величину F-критического следует определять по таблицам F-распределения для того же числа степеней свободы, что и по Фишеру: для суммы дисперсий в числителе $m-1$, а для знаменателя $mn-m$. Если отношение $\frac{1}{D_o[X]}(D_o[X]+nD_A[X]) < F$-критического, то влияние фактора А принимается несущественным *. Тогда в качестве оценки генеральной дисперсии вместо величины $D_o[X]$ можем принять общую дисперсию $D[X]$, которая обусловлена только случайными флюктуациями внутри- и между уровнями. Если значение $\frac{1}{D_o[X]}(D_o[X]+nD_A[X]) > F$-критического, то следует отбросить гипотезу о несущественном влиянии фактора А и принять альтернативную гипотезу о существенном его влиянии.

Пример 6.2.1. Применим ДА к результатам оценки трех методов преподавания, различающихся только использованием наглядного материала (пример 5.2.13, стр. 323).

По данным, приведенным в табл. 5.2.12 (стр. 323), вычислим промежуточные переменные (в общем виде, показанные в нижней части табл. 6.2.1), результаты приведены в табл. 6.2.4.

По уравнениям (6.2.3) вычислим суммы квадратов отклонений. Далее проведем расчет сначала по методу Фишера. Результаты его представлены в табл. 6.2.5.

Можно видеть, что при критическом значении F для числа степеней свободы 2 и 42 и для доверительной вероятности 0,01

$$F = 7{,}15 > F_{0{,}01;2/42} = 5{,}15,$$

т. е. различие значимо. Гипотезу об одинаковой эффективности трех методов преподавания, отличающихся степенью использования наглядных материалов, нужно отклонить и принять противоположную гипотезу.

---

* Не следует забывать, что такой вывод справедлив только для выборки того объема ($m \times n$), который был изучен. При большем количестве испытаний можем получить противоположный результат, и влияние фактора А придется оценить как существенное.

Таблица 6.2.4

Промежуточные данные для однофакторного ДА к примеру 6.2.1

	Метод A	Метод B	Метод C	$N=m\cdot n=3\cdot 15=45$
$S_j=\sum_{i=1}^{15} x_{ij}$	165	198	216	$\sum_{j=1}^{3} S_j=579$
$\sum_{i=1}^{15} x_{ij}^2$	1853	2706	3242	$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{15} x_{ij}^2=7801$
S_j^2	27225	39204	46 656	$\sum_{j=1}^{3} S_j^2=113\,085$
$\frac{S_j^2}{15}$	1815,0	2613,6	3110,4	$\sum_{j=1}^{3}\frac{S_j^2}{15}=7539{,}0$

Таблица 6.2.5

Результаты однофакторного ДА по методу Фишера при одинаковом n для данных примера 6.2.1

Вид вариативности	Суммы квадратов отклонений	Кол-во степеней свободы	Средние квадратов отклонений	Оцениваемые компоненты дисперсии	Значение F-критерия
Между уровнями	89,2	2	44,6	$15\cdot D_A[X]+D_0[X]$	$F=\frac{44{,}6}{6{,}24}=7{,}15$
Внутри уровней	262,0	42	6,24	$D_0[X]$	
Общая	351,2	44	—	—	

Теперь можем вычислить $D_A[X]$, которая, как оказалось, неслучайным образом отличается от нуля. Согласно уравнениям (6.2.5),

$$D_A[X]=(44{,}6-6{,}24)\cdot\frac{1}{15}\approx 2{,}56.$$

Таким образом, можем записать основное уравнение ДА:

$$D[X]=D_0[X]+D_A[X],$$

где $D_0[X]=6{,}24$; $D_A[X]=2{,}56$ и должно быть $D[X]=6{,}24+2{,}56=8{,}8$.

Вычислим $D[X]$, согласно уравнению (6.2.5) и табл. 6.2.5,

$$D[X] = \frac{351,2}{44} \cong 7,98.$$

Можно видеть, что основное уравнение ДА при вычислениях по Фишеру не выполняется: $D[X] < D_0[X] + D_A[X]$.*

Выполним теперь расчет дисперсий и дисперсионного отношения по исправленному методу. Дисперсии будем определять по уравнениям (6.2.7) для $mn - 1 = 44$ степеней свободы. Результаты приведены в табл. 6.2.6. Можно видеть, что основное уравнение дисперсионного анализа выполняется: общая дисперсия в точности равна сумме факторной и остаточной дисперсий.

Таблица 6.2.6

Результаты однофакторного дисперсионного анализа по исправленному методу при одинаковом n для данных примера 6.2.1

Вариативность	Qi	$mn-1$	$Di[X]$	F
Факторная	89,2	44	2,03	$F = \frac{5,95 + 15 \cdot 2,03}{5,95} = 6,12$
Случайная	262,0	44	5,95	
Общая	351,2	44	7,98	$F_{0,01;\,2/42} = 5,15$, т. е. различие значимо

Дисперсионное отношение определим по Фишеру:

$$F = \frac{D_0[X] + nD_A[X]}{D_0[X]}.$$

Как видно из табл. 6.2.6, при вычислении по исправленной методике дисперсионное отношение меньше, чем при вычислении по методу Фишера ($6,12 < 7,15$). В данном примере значимое различие сохраняется. Но важно отметить, что при близких к критическому значениях F методика Фишера может привести к отбрасыванию верной нулевой гипотезы и к принятию ложной альтернативной гипотезы, т. е. вероятность ошибки второго рода больше, если расчет вести по Фишеру.

6.2.2. Схема расчета при различном количестве повторных испытаний

При неодинаковом количестве повторных испытаний схема расчета несколько усложняется. Имеем план эксперимента: $m \cdot \sum_{j=1}^{m} n_j$, где n_j — объем выборки при j-том уровне фактора А.

* Не случайно в таблицах результатов ДА всегда отсутствуют значения общей дисперсии.

Результаты эксперимента табулируются, так же как и в предыдущем случае (табл. 6.2.1), но добавляется еще одна строка для значений n_j. Несколько видоизменяются формулы (6.2.3) для расчета сумм квадратов отклонений. Они теперь имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
Q &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}\right)^2,\\
Q_{\text{o}} &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}\right)^2,\\
Q_{\text{A}} &= n\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2.8)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
N &= \sum_{j=1}^{m} n_j,\\
n &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} n_j.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2.9)$$

Если пользоваться методом Фишера, то в качестве оцениваемых компонентов дисперсии имеем:

$$\frac{Q_{\text{A}}}{m-1} = \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} n_j\right)\cdot \mathrm{D}_{\text{A}}[X] + \mathrm{D}_{\text{o}}[X],$$

$$\frac{Q_{\text{o}}}{m(n-1)} = \mathrm{D}_{\text{o}}[X]$$

и

$$F = \frac{1}{\mathrm{D}_{\text{o}}[X]}\left\{\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} n_j\right)\mathrm{D}_{\text{A}}[X] + \mathrm{D}_{\text{o}}[X]\right\}. \qquad (6.2.10)$$

Для расчета дисперсий мы ниже будем пользоваться исправленным методом, а дисперсионное отношение вычислять по Фишеру.

Пример 6.2.2. Используем ДА для оценки влияния образовательного уровня (и возраста) школьников 6—11 классов на результаты по тесту «числовые ряды» (см. пример 5.2.12, стр. 321). Первичные данные были приведены в табл. 5.2.10 (стр. 321). Промежуточные данные для расчета сумм квадратов отклонений, согласно уравнениям (6.2.8), приведены в табл. 6.2.7. Суммы квадратов отклонений, количество степеней свободы, дисперсии и дисперсионное отношение приведены в табл. 6.2.8.

Для вычисления дисперсионного отношения используем формулу (6.2.10). Расчет в табл. 6.2.8 показывает, что $F \approx 20{,}56$.

Таблица 6.2.7

Данные для расчета сумм квадратов отклонений по уравнениям (6.2.8) к примеру 6.2.2

	Классы						Компоненты сумм в уравнениях (6.2.8)
	6	7	8	9	10	11	
$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$	363,0	376,5	389,0	460,5	502,5	447,5	$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}=2539{,}0$
n_j	27	25	26	25	26	23	$N=152$
$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2$	5100,5	5933,2	6018,0	8650,8	9874,8	8807,8	$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2=44\,385{,}1$
$\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}\right)^2$	4880,3	5670,1	5820,0	8482,4	9711,8	8706,8	$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}\right)^2=43\,271{,}4$

Таблица 6.2.8

Результаты однофакторного дисперсионного анализа (по исправленному методу) для неодинакового количества повторных испытаний

Вариативность	Q_i	$N-1$	D_i	F
Факторная	860,1	151	5,70	$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} n_j=25{,}3$
Случайная	1113,7	151	7,37	$F_э=\frac{25{,}3\cdot 5{,}70+7{,}37}{7{,}37}=\frac{151{,}58}{7{,}37}=20{,}56$
Общая	1973,8	151	13,07	$F^*_{0{,}01;\ 5/146}=3{,}14 \ll F_э$, т. е. различие значимо

Заметим, что вычисления по методу Фишера дают значение $F = 22{,}5$, весьма завышенное.

Сравнение с F^*-критическим при доверительной вероятности $P = 0{,}99$ и количестве степеней свободы для оцениваемых компонентов дисперсии (соответственно 5 и 146) показывает, что

различие значимо. Нулевая гипотеза должна быть отклонена, и следует принять гипотезу о существенном влиянии уровня образования (и возраста) школьников 6—11 классов на результаты по тесту «числовые ряды».

§ 6.3. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Основное уравнение ДА при двух факторах А и В, влияющих, как предполагается априори, на средние значения изучаемой переменной X, в общем случае задается уравнением

$$D[X] = D_A[X] + D_B[X] + D_{AB}[X] + D_o[X],$$

где $D_A[X]$ — компонент общей дисперсии ($D[X]$), обусловленный парциальным влиянием фактора А; $D_B[X]$ — компонент общей дисперсии, обусловленный парциальным влиянием фактора В; $D_{AB}[X]$ — компонент, обусловленный совместным влиянием (взаимодействием) факторов А и В; $D_o[X]$ — остаточная дисперсия. Член $D_{AB}[X]$ удается определить лишь при наличии повторных испытаний. Но в ряде случаев практически важно по минимальному количеству наблюдений выявить, существенно ли общее и парциальное влияние двух факторов, без учета их взаимодействия. Поэтому сначала рассмотрим схему двухфакторного ДА, когда повторные наблюдения отсутствуют, затем изложим схему с повторными наблюдениями.

6.3.1. Схема расчета при отсутствии повторных испытаний

При отсутствии повторных испытаний и произвольном количестве уровней каждого из двух факторов имеем схему испытаний $t \times g$, где t — количество уровней фактора А и g — количество уровней фактора В. Соответственно имеются уровни A_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, t$) и уровни B_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, g$) — всего tg испытаний. Причем, как показано в табл. 6.3.1. для каждой пары A_jB_i имеется всего одно наблюдение x_{ij} переменной X.

Если влияние факторов существенно, то оно должно сказываться на вариативности *между столбцами*, обусловленной фактором А, и на вариативности *между строками*, обусловленной фактором В. Поэтому для расчета факторных дисперсий необходимо определить суммы квадратов отклонений по столбцам и по строкам, кроме того, нужны соответствующие суммы для общей и остаточной дисперсий. Эти четыре суммы квадратов отклонений вычисляются по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{t} x_{ij}^2 - \frac{1}{gt}\left(\sum_{j=1}^{t} S_j\right)^2, \\ Q_B &= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{g} (S_i')^2 - \frac{1}{gt}\left(\sum_{j=1}^{t} S_j\right)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (6.3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{\text{А}} &= \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{t}(S_j)^2 - \frac{1}{gt}\left(\sum_{j=1}^{t}S_j\right)^2, \\ Q_{\text{о}} &= \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}^2 - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{g}(S_i')^2 - \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{t}(S_j)^2 + \frac{1}{gt}\left(\sum_{j=1}^{t}S_j\right)^2, \end{aligned}\right\}$$

где Q — общая сумма квадратов отклонений; $Q_{\text{А}}$ и $Q_{\text{В}}$ — суммы квадратов отклонений по факторам А и В; $Q_{\text{о}}$ — остаточная сумма. Легко видеть, что выполняется равенство

$$Q = Q_{\text{А}} + Q_{\text{В}} + Q_{\text{о}}. \tag{6.3.2}$$

Таблица 6. 3. 1

Первичные данные для двухфакторного анализа без повторных наблюдений

	A_1	A_2	. . .	A_j	. . .	A_t	Суммы по строкам	Квадраты сумм по строкам
B_1	x_{11}	x_{12}	. . .	x_{1j}	. . .	x_{1t}	S_1'	$(S_1')^2$
B_2	x_{21}	x_{22}	. . .	x_{2j}	. . .	x_{2t}	S_2'	$(S_2')^2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
B_i	x_{i1}	x_{i2}	. . .	x_{ij}	. . .	x_{it}	S_i'	$(S_i')^2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
B_g	x_{g1}	x_{g2}	. . .	x_{gj}	. . .	x_{gt}	S_g'	$(S_g')^2$
Суммы по столбцам	S_1	S_2	. . .	S_j	. . .	S_t	$gt = \sum_{j=1}^{t} S_j = \sum_{i=1}^{g} S_i'$	$\sum_{i=1}^{g}(S_i')^2$
Квадраты сумм по столбцам	S_1^2	S_2^2	. . .	S_j^2	. . .	S_t^2	$\sum_{j=1}^{t}(S_j)^2$	

Вычисление отдельных слагаемых, образующих суммы, не представляет затруднений. Отметим лишь, что на основе равенства суммы по столбцам и суммы по строкам (см. табл. 6.3.1) член $\frac{1}{gt}\left(\sum_{j=1}^{t}S_j\right)^2$ может быть заменен равным ему членом $\frac{1}{gt}\left(\sum_{i=1}^{g}S_i'\right)^2$.

По Фишеру, в рассматриваемом случае учитываются следующие степени свободы. Для факторных дисперсий: по числу уровней фактора минус одна $(t-1)$ и $(g-1)$. Для остаточной

дисперсии — общее количество степеней свободы минус суммарное число уровней без единицы: $tg - (g + t - 1) = (t - 1)(g - 1)$. Для общей — суммарное число степеней свободы без одной: $tg - 1$. Легко видеть, что

$$tg - 1 = (t-1)(g-1) + (t-1) + (g-1).$$

По методу Фишера оцениваемые компоненты дисперсии вычисляются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q_A}{t-1} &= g\mathrm{D_A}[X] + \mathrm{D_o}[X], \\ \frac{Q_B}{g-1} &= t\mathrm{D_B}[X] + \mathrm{D_o}[X], \\ \frac{Q_0}{(t-1)(g-1)} &= \mathrm{D_o}[X]. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.3}$$

На основе правых частей равенств (6.3.3) и соответствующего количества степеней свободы осуществляются вычисление и проверка дисперсионных отношений:

$$\left.\begin{aligned} F^{(A)}_{P;\, t-1/(t-1)(g-1)} &= \frac{g\mathrm{D_A}[X] + \mathrm{D_o}[X]}{\mathrm{D_o}[X]}, \\ F^{(B)}_{P;\, g-1/(t-1)(g-1)} &= \frac{t\mathrm{D_B}[X] + \mathrm{D_o}[X]}{D_o[X]}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.4}$$

Пользуясь исправленным методом, будем вычислять дисперсии по уравнениям, аналогичным (6.2.7), а затем проверять $F^{(i)}$ по (6.3.4).

Пример 6.3.1. В рассмотренном выше примере 6.2.1, оценивая влияние наглядности в преподавании тремя методами, мы не принимали во внимание такие существенные для успешного овладения материалом переменные, как прошлые успехи школьника в изучении предмета, его интерес к предмету и к учебе вообще и многое другое. При однофакторном ДА эффект этих переменных суммировался с эффектом метода преподавания и не мог быть выявлен. Но представляет интерес определить парциальные эффекты метода преподавания и, например, прошлой успеваемости школьников по данному предмету. Чтобы это было возможным, необходимо упорядочить учеников (для каждого из трех методов преподавания), согласно их предыдущей успеваемости. Пусть, например, первая тройка учеников (по одному на каждый из проверяемых методов преподавания) включает в себя наиболее успевавших в прошлом. Вторая тройка — успевавших чуть менее, третья — еще менее успевавших и т. д., наконец, последняя, пятнадцатая тройка — это наименее успевавшие ученики.

Полученные таким путем тройки учеников представляют собой уровни нового для нашего примера фактора — фактора предыду-

щей успеваемости школьников. Таким образом, у нас теперь рассматриваются два фактора. Первый фактор — назовем его А — это наглядность в преподавании; он имеет три уровня A_j ($j = 1, 2, t$; $t = 3$). Второй фактор (обозначим его В) — это предыдущая успеваемость школьников; пусть он имеет по-прежнему пятнадцать уровней B_i ($i = 1, 2, \ldots, g$; $g = 15$).

Если в примере, рассматривавшемся выше, группы учеников для преподавания каждым из трех методов выбирались случайно, то теперь, на основании только что изложенной схемы, нужно учесть предыдущую успеваемость учеников. Это означает, что

Таблица 6.3.2

Исходные и промежуточные данные для двухфакторного ДА при отсутствии повторных наблюдений

		Уровни A_j			s_i'	$(s_i')^2$
		A_1	A_2	A_3		
Уровни B_i	B_1	13	15	16	44	1936
	B_2	15	13	17	45	2025
	B_3	12	14	15	41	1681
	B_4	14	15	16	45	2025
	B_5	12	14	15	41	1681
	B_6	13	13	17	43	1849
	B_7	11	14	9	34	1156
	B_8	13	12	13	38	1444
	B_9	11	12	15	38	1444
	B_{10}	12	14	13	39	1521
	B_{11}	9	10	13	32	1024
	B_{12}	11	14	14	39	1521
	B_{13}	10	9	9	28	784
	B_{14}	7	9	14	30	900
	B_{15}	10	6	8	24	576
S_j		173	184	204	$N = 561$	$\sum_{i=1}^{15} (S_i')^2 = 21\,567$
S_j^2		29 929	33 856	41 616	$\sum_{j=1}^{3} (S_j)^2 = 105\,401$	
$\sum_{i=1}^{15}$		2053	2354	2890	$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{15} x_{ij}^2 = 7297$	

из числа пятнадцати различных по успеваемости групп * необходимо случайным образом выбрать из каждой группы трех учеников соответственно трем методам преподавания. Далее с выборкой в 45 учеников проводится эксперимент, как указано в примере 5.2.13 (стр. 323).

Результаты эксперимента табулируют согласно табл. 6.3.1. Вычисляют сначала промежуточные значения для слагаемых сумм квадратов отклонений (уравнения 6.3.1), они представлены в нижней части табл. 6.3.2, а затем находят сами слагаемые и суммы Q_i:

$$\frac{1}{gt}\left(\sum_{j=1}^{t} S_j\right)^2 = \frac{1}{gt}\left(\sum_{i=1}^{g} S'_i\right)^2 = \frac{561^2}{45} = 6993{,}8;$$

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{g}(S'_i)^2 = 7189{,}0; \quad \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{t}(S_j)^2 = 7026{,}7.$$

Суммы квадратов отклонений представлены в табл. 6.3.3. Там же показаны результаты ДА. Можно видеть, что влияние

Таблица 6.3.3

Результаты двухфакторного ДА при отсутствии повторных наблюдений (к примеру 6.3.1)

Вид вариативности	Суммы квадратов отклонений	Число степеней свободы для вычисления дисперсий	Оцениваемые дисперсии	Число степеней свободы для F — критич.	Дисперсионные отношения
По фактору A	$Q_A = 7026{,}7 - 6993{,}8 = \underline{32{,}9}$	44	$D_A[X] = 0{,}748$	2	$F^{(A)} = \frac{15 \cdot D_A[X] + D_0[X]}{D_0[X]} \approx \approx 7{,}58$
По фактору B	$Q_B = 7189{,}0 - 6993{,}8 = \underline{195{,}2}$	44	$D_B[X] = 4{,}436$	14	$F^{(B)} = \frac{3 \cdot D_B[X] + D_0[X]}{D_0[X]} \approx \approx 8{,}97$
Остаточная	$Q_0 = 7297{,}0 - 7189{,}0 - 7026{,}0 + 6993{,}8 = \underline{75{,}1}$	44	$D_0[X] = 1{,}706$	28	$F^{(A)} > F^*_{0,99;\ 2/28} \approx 5{,}45$; $F^{(B)} > F^*_{0,99;\ 14/28} \approx 2{,}8$
Общая	$Q = 7297{,}0 - 6993{,}8 = \underline{303{,}2}$	44	$D[X] = 6{,}89$	—	Влияние A и B значимо

* Успеваемость внутри группы должна быть примерно одинаковой.

обоих проверяемых факторов значимо, так как эмпирические дисперсионные отношения превосходят критические значения F^* при доверительной вероятности $P = 0{,}99$.

6.3.2. Схема расчета при наличии повторных испытаний

При наличии повторных испытаний и произвольном количестве уровней каждого из двух факторов имеется схема испытаний: $t \times g \times n$, где по-прежнему t — количество уровней одного из факторов (например А), g — количество уровней другого фактора (В); n — количество повторных наблюдений изучаемой переменной, одинаковое для сочетаний по два всех уровней факторов. Первичные данные в этом случае группируются в «блоки» по n значений x_{ijk}, соответствующих каждой паре $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_i$ уровней факторов А и В, как это показано в табл. 6.3.4; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Значения x_{ijk} изучаемой переменной X, сгруппированные в блоках, наблюдаются при одних и тех же (внутри каждого блока) уровнях обоих факторов. Поэтому их дисперсия, наряду со случайными флюктуациями, обусловлена совместным действием факторов при каждой паре уровней.

Чтобы выявить компонент дисперсии $\mathrm{D_{AB}}[X]$, обусловленный совместным действием факторов, необходимо к четырем суммам Q_i квадратов центральных отклонений добавить пятую сумму Q_{AB}, определяемую для блоков. При этом из-за введения дополнительной переменной все формулы (6.3.1) несколько усложнятся:

$$\left.\begin{aligned}
Q_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{ng}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{ngt}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2,\\
Q_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{nt}\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{ngt}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2,\\
Q_{\mathrm{AB}} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{ng}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 -\\
&\quad - \frac{1}{nt}\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 + \frac{1}{ngt}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2,\\
Q_{\mathrm{o}} &= \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}^2 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2,\\
Q &= \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}^2 - \frac{1}{ngt}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2,
\end{aligned}\right\}\quad(6.3.5)$$

где Q_A и Q_B — суммы квадратов отклонений по факторам А и В; Q_{AB} — сумма квадратов отклонений для совместного действия факторов; Q_o — для остаточной и Q — для общей дисперсий. Можно видеть, что выполняется равенство

$$Q = Q_A + Q_B + Q_{AB} + Q_o. \qquad (6.3.6)$$

Сопоставление компонентов формул (6.3.5) с табл. 6.3.4. хорошо демонстрирует вычислительную процедуру, которую ниже рассмотрим на примере.

Согласно Фишеру, число степеней свободы для $D_A[X]$ и $D_B[X]$ остается прежним: $(t-1)$ и $(g-1)$ соответственно. Для вычисления остальных компонентов дисперсии количество

Таблица 6.3.4

Представление первичных данных для двухфакторного дисперсионного анализа с повторными наблюдениями

		k*	Уровни фактора А					
			A_1	A_2	...	A_j	...	A_t
Уровни фактора В	B_1	1	x_{111}	x_{121}		x_{1j1}		x_{1t1}
		2	x_{112}	x_{122}		x_{1j2}		x_{1t2}
		...	...	...	...	...	...	...
		k	x_{11k}	x_{12k}		x_{1jk}		x_{1tk}
		...	...	...		...		...
		n	x_{11n}	x_{12n}		x_{1jn}		x_{1tn}
	B_2	1	x_{211}	x_{221}		x_{2j1}		x_{2t1}
		2	x_{212}	x_{222}		x_{2j2}		x_{2t2}
		...	...	...	...	...	...	...
		k	x_{21k}	x_{22k}		x_{2jk}		x_{2tk}
		...	...	...		...		...
		n	x_{21n}	x_{22n}		x_{2jn}		x_{2tn}
	...	...	...	...	...	...	...	...
	B_i	1	x_{i11}	x_{i21}		x_{ij1}		x_{it1}
		2	x_{i12}	x_{i22}		x_{ij2}		x_{it2}
		...	...	...	...	...	...	...
		k	x_{i1k}	x_{i2k}		x_{ijk}		x_{itk}
		...	...	...		...		...
		n	x_{i1n}	x_{i2n}		x_{ijn}		x_{itn}
	...	...	...	...	...	...	...	...
	B_g	1	x_{g11}	x_{g21}		x_{gj1}		x_{gt1}
		2	x_{g12}	x_{g22}		x_{gj2}		x_{gt2}
		...	...	...	...	...	...	...
		k	x_{g1k}	x_{g2k}		x_{gjk}		x_{gtk}
		...	...	...		...		...
		n	x_{g1n}	x_{g2n}		x_{gjn}		x_{gtn}

* k — номера повторных наблюдений.

степеней свободы дается следующими формулами: для $D_{AB}[X]$ $(t-1)(g-1)$, для $D_o[X]$ $(n-1)\,tg$ и для $D[X]$ $tgn-1$.

По исправленной методике для всех дисперсий принимается одно и то же число степеней свободы: $tgn-1$. Дисперсионные отношения для проверки значимости парциального и совместного действия факторов определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} F^{A} &= \frac{ng\,D_A[X] + nD_{AB}[X] + D_o[X]}{D_o[X]}, \\ F^{B} &= \frac{nt D_B[X] + nD_{AB}[X] + D_o[X]}{D_o[X]}, \\ F^{AB} &= \frac{nD_{AB}[X] + D_o[X]}{D_o[X]}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.3.7)$$

Пример 6.3.2.* Экспериментально исследовалось влияние двух факторов на успешность прохождения крысами лабиринта. Один из факторов — степень подвижности (активности) крысы, другой — условия воспитания, в различной мере способствующие формированию активности животного. Было три уровня первого фактора, по которым все крысы подразделялись на три группы: подвижных (bright), уравновешенных (mixed) и вялых (dull), и два уровня второго фактора, по которым каждая из трех групп делилась на две подгруппы: воспитывавшихся в свободных (free) условиях и воспитывавшихся в стесненных (restricted) условиях. В каждую из подгрупп (блоков) входило восемь крыс. В табл. 6.3.5 представлены результаты эксперимента **.

Для вычисления сумм квадратов центральных отклонений по формулам (6.3.5) требуется выполнить промежуточные расчеты, результаты которых удобно табулировать, как сделано в табл. 6.3.6. Далее каждая из 12 сумм в табл. 6.3.6 возводится в квадрат, а затем осуществляется суммирование:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)^2 = 2\,137\,469,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)^2 = 4\,015\,617,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)^2 = 5\,944\,837,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)^2 = 11\,175\,649.$$

---

* Заимствован из кн.: G. A. F e r g u s o n. Statistical Analysis in Psychology and Education. Second Ed. McGraw-Hill, Inc. 1966, p.317.

** Фергюсон не указывает, что за переменная измерялась, но судя по данным в табл. 6.3.5, можно думать, что это какая-либо количественная характеристика успешности прохождения лабиринта.

Таблица 6.3.5

Исходные данные к примеру 6.3.2

Условия воспитания (B_i)		k	Степень активности крысы (A_j): A_1 — подвижные	A_2 — уравновешенные	A_3 — вялые
	B_1 Свободные	1	26	41	36
		2	41	26	39
		3	28	19	59
		4	92	59	27
		5	14	82	87
		6	16	86	99
		7	29	45	126
		8	31	37	104
	B_2 Стесненные	1	51	39	42
		2	96	104	92
		3	97	130	156
		4	22	122	144
		5	35	114	133
		6	36	92	124
		7	28	87	68
		8	76	64	142

Таблица 6.3.6

Промежуточные величины для расчета сумм квадратов по формулам (6.3.5) и табл. 6.3.5

	A_1	A_2	A_3	Суммы по строкам
B_1	$\left(\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{11} = 277$	$\left(\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{12} = 395$	$\left(\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{13} = 577$	$\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{1} = 1249$
B_2	$\left(\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{21} = 441$	$\left(\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{22} = 752$	$\left(\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{23} = 901$	$\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{2} = 2094$
Суммы по столбцам	$\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{1} = 718$	$\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{2} = 1147$	$\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right)_{3} = 1478$	$\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}\right) = 3343$

Таблица 6.3.7

Результаты двухфакторного дисперсионного анализа с повторными наблюдениями по данным примера 6.3.2

Вид вариативности	Суммы квадратов отклонений	Число степеней свободы	Оцениваемая дисперсия	Дисперсионные отношения
По фактору A	$Q_A = 14875{,}52$	47	$D_A[X] = 316{,}50$	$F^{(A)} = \frac{1}{907{,}82}(8 \cdot 2 \cdot 316{,}5 + 8 \cdot 28{,}34 + 907{,}82) \approx 6{,}83$
По фактору B	$Q_B = 18150{,}04$	47	$D_B[X] = 386{,}17$	$F^{(B)} = \frac{1}{907{,}82}(8 \cdot 3 \cdot 386{,}17 + 8 \cdot 28{,}34 + 907{,}82) \approx 11{,}46$
Для взаимодействия A и B	$Q_{AB} = 1332{,}04$	47	$D_{AB}[X] = 28{,}34$	$F^{(AB)} = \frac{8 \cdot 28{,}34 + 907{,}82}{907{,}82} \approx 1{,}25$
Остаточная	$Q_o = 42667{,}38$	47	$D_o[X] = 907{,}82$	$F^{(A)} > F^*_{0{,}99;\ 2/42} = 5{,}15$
Общая	$Q = 77024{,}98$	47	$D[X] = 1638{,}83$	$F^{(B)} > F^*_{0{,}99;\ 1/42} = 7{,}27$
				$F^{(AB)} < F^*_{0{,}95;\ 2/42} = 3{,}22$

Кроме того, непосредственно по табл. 6.3.5 получают

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{8} x_{ijk}^2 = 309\,851.$$

Теперь остается лишь подставить значения сумм в формулы (6.3.5) и при $t = 3$, $g = 2$, $n = 8$ вычислить Q_i. Все остальные расчеты тривиальны. Поэтому в табл. 6.3.7 приводятся лишь окончательные результаты дисперсионного анализа, выполненного по исправленной методике.

Как показывает сравнение эмпирических значений дисперсионных отношений с их теоретическими значениями, парциальное действие обоих изучавшихся факторов существенно, но их взаимодействие не существенно. Следовательно, можно в качестве более полной оценки случайных флюктуаций принять сумму

$$D_o^* [X] = D_{AB} [X] + D_o [X] = 936{,}16.$$

Отметим в заключение, что двухфакторный анализ с повторными наблюдениями возможен и при неодинаковом количестве дат в блоках. Схема расчетов для этого случая приведена в упомянутой книге Фергюсона.

§ 6.4. ТРЕХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Схема трехфакторного дисперсионного анализа похожа на схему двухфакторного ДА с одинаковым количеством повторных наблюдений, только вместо них берется n уровней третьего фактора C_k, где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Если при трех факторах отсутствуют повторные наблюдения, то нельзя определить взаимодействие ABC. Поэтому начнем рассмотрение сразу со схемы трехфакторного эксперимента, в котором при каждой комбинации факторов имеются повторные наблюдения. Итак, имеем три фактора: A_j ($j = 1, 2, \ldots, t$), B_i ($i = 1, 2, \ldots, g$) и C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Кроме того, для каждой комбинации уровней $A_jB_iC_k$ имеется l повторных наблюдений значений x_{ijkm} переменной X ($m = 1, 2, \ldots, l$) — всего $tgnl$ наблюдений.

Пусть наблюдения сгруппированы поблочно (в блоке l повторных наблюдений) в черновых таблицах. Суммируя значения x_{ijkm} в каждом из блоков, определим суммы $\sum_{m=1}^{l} A_jB_iC_k$, которые запишем в табл. 6.4.1.* Затем вычислим остальные суммы для комбинаций факторов по два и для парциального действия факторов. Эти суммы для простоты обозначены и рассчитываются так, как показано в табл. 6.4.1.

---

* Индекс m в таблице опущен.

Суммы квадратов центральных отклонений вычисляются по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
Q_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{ngl}\sum_{j}\Big(\sum \mathrm{A}_j\Big)^2 - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{tnl}\sum_{i}\Big(\sum \mathrm{B}_i\Big)^2 - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q_{\mathrm{C}} &= \frac{1}{tgl}\sum_{k}\Big(\sum \mathrm{C}_k\Big)^2 - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q_{\mathrm{AB}} &= \frac{1}{nl}\sum_{j}\sum_{i}\Big(\sum \mathrm{A}_j\mathrm{B}_i\Big)^2 - Q_{\mathrm{A}} - Q_{\mathrm{B}} - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q_{\mathrm{AC}} &= \frac{1}{gl}\sum_{j}\sum_{k}\Big(\sum \mathrm{A}_j\mathrm{C}_k\Big)^2 - Q_{\mathrm{A}} - Q_{\mathrm{C}} - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q_{\mathrm{BC}} &= \frac{1}{tl}\sum_{i}\sum_{k}\Big(\sum \mathrm{B}_i\mathrm{C}_k\Big)^2 - Q_{\mathrm{B}} - Q_{\mathrm{C}} - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q_{\mathrm{ABC}} &= \frac{1}{l}\sum_{j}\sum_{i}\sum_{k}\Big(\sum \mathrm{A}_j\mathrm{B}_i\mathrm{C}_k\Big)^2 - Q_{\mathrm{A}} - Q_{\mathrm{B}} - Q_{\mathrm{C}} - Q_{\mathrm{AB}} -\\
&\qquad - Q_{\mathrm{AC}} - Q_{\mathrm{BC}} - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q_{\mathrm{o}} &= \sum_{j}\sum_{i}\sum_{k}\sum_{m}(x_{ijkm})^2 - Q_{\mathrm{A}} - Q_{\mathrm{B}} - Q_{\mathrm{C}} - Q_{\mathrm{AB}} - Q_{\mathrm{AC}} -\\
&\qquad - Q_{\mathrm{BC}} - Q_{\mathrm{ABC}} - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2},\\
Q &= \sum_{j}\sum_{i}\sum_{k}\sum_{m}(x_{ijkm})^2 - \frac{1}{tgnl}\sum\nolimits_{\text{общ}}^{2}.
\end{aligned}\right\}\quad (6.4.1)$$

Нетрудно видеть, что основное уравнение дисперсионного анализа в системе уравнений (6.4.1) выполняется:

$$Q = Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}} + Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{AC}} + Q_{\mathrm{BC}} + Q_{\mathrm{ABC}} + Q_{\mathrm{o}}. \quad (6.4.2)$$

Определяя соответствующие дисперсии, следует разделить равенство (6.4.2) почленно на общее число степеней свободы ($tgnl - 1$). Источники вариативности, количества степеней свободы и дисперсионные отношения в общем виде записаны в табл. 6.4.2. Процедура расчета и проверки значимости компонент общей дисперсии аналогичны рассмотренным выше.

Прежде чем перейти к примеру, сделаем два дополнительных замечания.

1. Изложенная схема трехфакторного анализа с повторными наблюдениями без труда упрощается до схемы без повторных

Таблица 6.4.1

Таблица первичных сумм для вычисления сумм квадратов центральных отклонений

	A_1		A_2		
	C_1	C_2	C_1	C_2	
B_1	$\sum A_1B_1C_1$	$\sum A_1B_1C_2$	$\sum A_2B_1C_1$	$\sum A_2B_1C_2$	$\sum B_1$
B_2	$\sum A_1B_2C_1$	$\sum A_1B_2C_2$	$\sum A_2B_2C_1$	$\sum A_2B_2C_2$	$\sum B_2$
	$\sum A_1C_1$	$\sum A_1C_2$	$\sum A_2C_1$	$\sum A_2C_2$	Общая сумма всех наблюдений $\Sigma_{\text{общ}}$
	$\sum A_1$		$\sum A_2$		
	$\sum C_1$		$\sum C_2$		
	$\sum A_1B_1$	$\sum A_1B_2$	$\sum A_2B_1$	$\sum A_2B_2$	
	$\sum B_1C_1$	$\sum B_1C_2$	$\sum B_2C_1$	$\sum B_2C_2$	

Примечание. $\sum A_j = \sum A_jC_1 + \sum A_jC_2$; $\sum C_k = \sum A_1C_k + \sum A_2C_k$; $\sum A_jB_i = \sum A_jB_iC_1 + \sum A_jB_iC_2$; $\sum B_iC_k = \sum A_1B_iC_k + \sum A_2B_iC_k$. Эти формулы легко обобщаются на большее, чем 2, число уровней факторов.

наблюдений. В табл. 6.4.1 все $\Sigma\ A_jB_iC_k$ заменяются одним числом; в формулах (6.4.1) $l = 1$ можно опустить, а Q_{ABC} выпадает, так как ее нельзя выделить из $Q_о$; выпадают значения lD_{ABC} и $F^{(ABC)}$ в табл. 6.4.2.

2. Для упрощения расчетов дисперсионного комплекса в настоящее время стремятся применять линейные преобразования исходной переменной:

$$x_{ijkm} = ay_{ijkm} + b,$$

т. е. переходят к новой переменной

$$y_{ijkm} = \frac{x_{ijkm} - b}{a},$$

перенося начало отсчета b и изменяя масштаб. Следует вспомнить, что при этом значения Q_i оказываются измененными в a^2 раз (уменьшенными, если $a > 1$, и увеличенными, если $a < 1$), и это необходимо учитывать при окончательном расчете дисперсий D_i.

Таблица 6.4.2

Трехфакторный дисперсионный анализ с повторными наблюдениями

Источники вариативности	Количество степеней свободы	Дисперсионные отношения
A	$t-1$	$F^{(A)}=\frac{1}{D_o}\times(gn\,D_A+n\,D_{AB}+g\,D_{AC}+l\,D_{ABC}+D_o$
B	$g-1$	$F^{(B)}=\frac{1}{D_o}\times(tn\,D_B+n\,D_{AB}+t\,D_{BC}+l\,D_{ABC}+D_o)$
C	$n-1$	$F^{(C)}=\frac{1}{D_o}\times(tg\,D_C+g\,D_{AC}+t\,D_{BC}+l\,D_{ABC}+D_o)$
AB	$(t-1)(g-1)$	$F^{(AB)}=\frac{1}{D_o}(n\,D_{AB}+l\,D_{ABC}+D_o)$
AC	$(t-1)(n-1)$	$F^{(AC)}=\frac{1}{D_o}(g\,D_{AC}+l\,D_{ABC}+D_o)$
BC	$(g-1)(n-1)$	$F^{(BC)}=\frac{1}{D_o}(t\,D_{BC}+l\,D_{ABC}+D_o)$
ABC	$(t-1)(g-1)(n-1)$	$F^{(ABC)}=\frac{1}{D_o}(l\,D_{ABC}+D_o)$
Случайные	$tgn(l-1)$	
Итого	$tgnl-1$	

Примечание. Обозначения дисперсий сокращены: D_A — вместо $D_A[X]$, D_{AB} — вместо $D_{AB}[X]$ и т. п.

Пример 6.4.1 *. Рассмотрим трехфакторную схему с повторными наблюдениями переменной X, значения которой x_{ijkm} представлены в табл. 6.4.3.

Числа в табл. 6.4.3 большие и содержат дробную часть. Поэтому осуществим линейное преобразование переменной, выбрав в качестве свободного члена ближайшее к математическому ожиданию целое число $b = 28$, а в качестве нормирующего множителя $a = 0{,}5$, чтобы избавиться от дробей:

$$y_{ijkm}=2(x_{ijkm}-28).$$

Значения преобразованной переменной Y приведены в табл. 6.4.4. Вычислим по этим данным все суммы, согласно табл. 6.4.1;

* Заимствован из кн: Ч. Хикс. Основные принципы планирования эксперимента. «Мир», М., 1967.

Таблица 6.4.3

Значения переменной X для трехфакторного дисперсионного анализа

	A_1		A_2	
	C_1	C_2	C_1	C_2
B_1	29,0	28,5	28,0	29,5
	26,5	28,5	28,5	32,0
	30,5	30,0	28,0	29,0
	27,0	32,5	25,0	28,0
B_2	28,0	27,0	24,5	27,5
	25,0	29,0	25,0	28,0
	26,5	27,5	28,0	27,0
	26,5	27,5	26,0	26,0

Таблица 6.4.4

Значения новой переменной $y = 2(x - 28)$

	A_1		A_2	
	C_1	C_2	C_1	C_2
B_1	2	1	0	3
	−3	1	1	8
	5	4	0	2
	−2	9	−6	0
B_2	0	−2	−7	−1
	−6	2	−6	0
	−3	−1	0	−2
	−3	−1	−4	−4

результаты приведены в табл. 6.4.5. Пользуясь табл. 6.4.5 и формулами (6.4.1), вычислим суммы квадратов центральных отклонений:

$$Q_A = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4}[3^2 + (-16)^2] - \frac{1}{32}(-13)^2 = 11{,}28,$$

$$Q_B = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4}[25^2 + (-38)^2] - \frac{1}{32}(-13)^2 = 124{,}03,$$

$$Q_C = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4}[(-32)^2 + 19^2] - \frac{1}{32}(-13)^2 = 81{,}28,$$

$$Q_{AB} = \frac{1}{2 \cdot 4}[17^2 + (-14)^2 + 8^2 + (-24)^2] - 11{,}28 - $$

$$- 124{,}03 - \frac{1}{32}(-13)^2 = 0{,}03,$$

$$Q_{AC} = \frac{1}{2 \cdot 4}[(-10)^2 + 13^2 + (-22)^2 + 6^2] - 11{,}28 -$$

$$-81{,}28-\frac{1}{32}(-13)^2=0{,}78,$$

$$Q_{BC}=\frac{1}{2\cdot 4}[(-3)^2+28^2+(-29)^2+(-9)^2]-124{,}03-$$

$$-81{,}28-\frac{1}{32}(-13)^2=3{,}78,$$

$$Q_{ABC}=\frac{1}{4}[2^2+15^2+(-5)^2+13^2+(-12)^2+(-2)^2+(-17)^2+$$

$$+(-7)^2]-11{,}28-124{,}03-81{,}28-0{,}03-0{,}78-$$

$$-3{,}78-\frac{1}{32}(-13)^2=0{,}79.$$

$$Q_o=441-11{,}28-124{,}03-81{,}28-0{,}03-0{,}78-$$

$$-3{,}78-0{,}79-\frac{1}{32}(-13)^2=213{,}75,$$

$$Q=441-\frac{1}{32}(-13)^2=435{,}72.$$

Таблица 6.4.5

Расчет первичных сумм для вычисления Q_i к примеру 6.4.1

	A_1		A_2		
	C_1	C_2	C_1	C_2	
B_1	2	15	−5	13	25
B_2	−12	−2	−17	−7	−38
	$\sum A_1C_1=-10$	$\sum A_1C_2=13$	$\sum A_2C_1=-22$	$\sum A_2C_2=6$	
	$\sum A_1=3$		$\sum A_2=-12$		$\sum_{общ}=-13$
	$\sum C_1=-32$		$\sum C_2=19$		
	$\sum A_1B_1=17$	$\sum A_1B_2=-14$	$\sum A_2B_1=8$	$\sum A_2B_2=-24$	
	$\sum B_1C_1=-3$	$\sum B_1C_2=28$	$\sum B_2C_1=-29$	$\sum B_2C_2=-9$	

Рассчитаем дисперсионные отношения по схеме Фишера и по исправленному методу. Заметим, что для вычисления можно пользоваться суммами квадратов и дисперсиями случайной переменной Y. Результаты трехфакторного дисперсионного анализа данных рассматриваемого примера по схеме Фишера представлены в табл. 6.4.6. Можно видеть, что из семи нулевых гипотез, которые состоят в допущении неслучайного влияния факторов А, В и С в отдельности, по два и по три, приняты могут быть только две, а именно, относящиеся к факторам В и С.

Таблица 6.4.6

Результаты трехфакторного дисперсионного анализа по схеме Фишера

Источник вариативности	Кол-во степеней свободы	Q_i	Средний квадрат отклонений	Эмпирическое $F^{(i)}$
A	1	11,28	11,28	1,26
B	1	124,03	124,03	<u>13,92</u>
C	1	81,28	81,28	<u>9,12</u>
AB	1	0,03	0,03	0,00
AC	1	0,78	0,78	0,09
BC	1	3,78	3,78	0,42
ABC	1	0,79	0,79	0,09
Случайные	24	213,75	8,91	—
Итого	31	435,72	$F^*_{0,95;\ 1/24}=4,26$	
			$F^*_{0,99;\ 1/24}=7,82$	

Примечание. Подчеркнуты значимые на 99%-ном доверительном уровне дисперсионные отношения. Напомним, что эмпирическое $F^{(i)}$ получается как частное от деления i-того среднего квадрата отклонений на 8,91, соответствующее остаточной дисперсии.

Так как вариативность, обусловленная источниками A, AB, BC, AC и ABC, должна рассматриваться как случайная, то логично отнести эти источники вариативности в группу случайных прочих факторов. Для схемы Фишера это означает, что соответствующие суммы квадратов центральных отклонений Q_i должны быть включены в Q_0':

$$Q_0' = Q_A + Q_{AB} + Q_{AC} + Q_{BC} + Q_{ABC} + Q_0 =$$
$$= 11,28 + 0,03 + 0,78 + 3,78 + 0,79 + 213,75 = 230,41.$$

Новой сумме Q_0', воплощающей в себе влияние случайных факторов, соответствует теперь и новое число степеней свободы: 5 + 24 = 29. Поэтому и средний квадрат отклонений, выражающий по Фишеру оценку остаточной дисперсии, становится несколько меньше, чем прежде: 230,41 : 29 = 7,94. В нашем примере это приводит к увеличению эмпирических дисперсионных отношений, и без того значимых, но в других случаях можно незначимое $F^{(i)}$ «перевести» в значимое или, наоборот, т. е. изменить решение на противоположное.

Результаты трехфакторного дисперсионного анализа, выполненного с разложением дисперсий по В. А. Авилову, представлены в табл. 6.4.7. Можно видеть, что все эмпирические диспер-

Таблица 6.4.7

Результаты трехфакторного дисперсионного анализа с разложением дисперсии по В. А. Авилову

Источник вариативности	Кол-во степеней свободы	Q_i	$D'_i = \frac{Q_i}{31}$	Эмпирическое $F^{(i)}$
A	31	11,28	0,364	1,23
B	31	124,03	4,001	3,37
C	31	81,28	2,609	2,57
AB	31	0,03	0,001	1,02
AC	31	0,78	0,026	1,02
BC	31	3,78	0,122	1,05
ABC	31	0,79	0,026	1,02
Случайные	31	213,75	6,900	—
Итого:	31	435,72	14,055	$F^*_{0,95;\ 1/24} = 4,26$

Примечания: 1) D'_i — это дисперсии случайной переменной Y. Для исходной случайной величины X дисперсии $D_i = a^2 \cdot D'_i = 0,25D'_i$; 2) эмпирические дисперсионные отношения вычислялись по формулам, приведенным в табл. 6.4.2.

сионные отношения оказываются по величине меньше, чем F-критическое. Следовательно, для каждого из факторов и факторных взаимодействий исходная гипотеза о неслучайном влиянии факторов А, В и С на переменную X должна быть отброшена и (при данном числе наблюдений) должна быть принята альтернативная гипотеза: парциальное влияние факторов и их взаимодействий не отличается от случайного.

Остается проверить, отличается ли от случайного совокупное действие всех рассмотренных факторов и их взаимодействий? При такой постановке вопроса многофакторная схема сводится к однофакторной:

$$D[X] = D_ф[X] + D_о[X],$$

где $D[X]$ — общая дисперсия, которая рассматривается как сумма только двух компонент: $D_ф[X]$ — факторной дисперсии, обусловленной действием всех изучаемых факторов, и $D_о[X]$ — остаточной дисперсии, обусловленной неконтролируемыми в опыте причинами.

Очевидно, что факторная дисперсия — это сумма «парциальных» дисперсий факторов и их взаимодействий. В частности, для трехфакторного анализа:

$$D'_ф = D'_A + D'_B + D'_C + D'_{AB} + D'_{AC} + D'_{BC} + D'_{ABC}. \quad (6.4.2)$$

Число степеней свободы для $D_ф$ определяется суммой степеней свободы слагаемых в правой части уравнения (6.4.2); оно составляет tgn — 1 (см. табл. 6.4.2).

Эмпирическое дисперсионное отношение здесь вычисляется как при однофакторном анализе:

$$F_э = \frac{(tgn-1)\cdot D'_ф + D'_0}{D'_0}. \qquad (6.4.3)$$

Используя значения дисперсий D'_i из табл. 6.4.7, вычислим факторную дисперсию и $F_э$:

$$D'_ф = 0,364 + 4,001 + 2,609 + 0,001 + 0,026 + 0,122 + $$
$$+ 0,026 = 7,149.$$

Проверка показывает, что с точностью до тысячных долей основное дисперсионное уравнение (6.1.1) выполняется.

$$F_э = \frac{7\cdot 7,149 + 6,9}{6,9} \approx 8,25,$$

что больше критического $F^*_{0,99;\,7/24} = 6,07$. Следовательно, можно принять, что совокупное действие рассмотренных факторов на переменную X отличается от случайного.

Глава 7

ОСНОВЫ МЕТОДОВ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

§ 7.1. ПОНЯТИЕ О МЕТОДАХ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

7.1.1. Сущность факторного анализа

Явной переменной будем называть величину, которую можно *непосредственно* или *косвенно измерить*.* Например, можно непосредственно измерить длину стола линейкой. Силу электрического тока можно косвенно измерить через посредство напряженности магнитного поля в проводнике. Длина стола, сила электрического тока — это явные переменные. Отметим, что при косвенных измерениях переменной X через переменную Y должно быть известно в явном виде уравнение $X = f(Y)$.

Латентной переменной (фактором) будем называть величину, которую непосредственно измерить нельзя и для которой неизвестны уравнения связи с какими-либо явными переменными.

Большинство психических явлений, безусловно, должно рассматриваться как латентные переменные. Во многих случаях мы не знаем о них ничего, кроме того, что они существуют и, обусловливая жизнедеятельность, проявляются в действиях (реакциях) индивида. Эти действия представляют собой явные переменные, так как их можно объективно измерить, прямо или косвенно.

Весом (*зарядом*, *откликом*) латентной переменной (фактора) у i-того индивида будем называть некоторую количественную меру проявления этой латентной переменной в наблюдаемых или специально вызываемых действиях (реакциях) данного индивида.

Тестированием будем называть естественное или специально сконструированное воздействие на психику,** вызывающее отклик латентного свойства F, который проявляется в объективно регистрируемом действии Z, где $Z = \psi(F)$, причем вид функции ψ неизвестен.

Задание, посредством которого осуществляется тестирование, называют *тестом*. Характер теста может быть любым — это и вопрос, требующий ответа, и задача, требующая решения, и

* В шкалах порядка и выше по С. С. Стивенсу («Математика, измерения и психофизика» в кн.: Экспериментальная психология, т. 1, «Мир», М., 1963).

** Вообще — на живой организм или физический объект.

некоторая ситуация, требующая определенного комплекса действий и т. п. Применение теста A_j к i-тому индивиду вызывает у индивида реакцию z_{ji}, которая как-либо оценивается или измеряется. Например, ответы испытуемых по тестам шкалы Векслера оцениваются суммами баллов.

Зарядом (весом) латентной переменной (фактора) по j-тому тесту будем называть количественную меру выявления данного фактора с помощью данного теста.

Обычно психические явления на первичном уровне описания характеризуются группой свойств. Каждое из таких свойств — это латентная переменная. Свойства в группе могут быть соподчинены, могут различаться по степени общности. В этой связи и латентные переменные, отображающие группу свойств, образуют *латентную структуру*, в которой отдельные переменные могут в определенном отношении рассматриваться как *общие*, *групповые* и *специфические*. Кроме того, переменные в латентной структуре могут быть взаимосвязаны.

Итак, *латентной структурой* будем называть систему латентных переменных, характеризующих некоторое психическое явление и обусловливающих систему реакций индивида в ответ на систему внешних воздействий. Иначе говоря, латентная структура обусловливает определенное поведение в основных условиях.

Очевидно, уже по определению латентная структура должна рассматриваться в качестве структуры *случайной* как по характеру существования и выраженности ее элементов у различных индивидов, так и по степени возможности ее тестирования и описания. В этой связи факторный анализ как группа методов, направленных к выявлению и описанию латентной структуры, базируется на следующих основных постулатах.

Постулат 1. Существование латентной структуры полностью определимо только на множестве индивидуумов, образующих генеральную совокупность. *Следствие*: латентная структура отдельного индивида есть случайная реализация общей латентной структуры.

Постулат 2. Латентная структура может проявиться лишь через определенное множество тестирований. *Следствие*: латентная структура, выявляемая через *неопределенное* множество тестирований, есть случайная реализация общей латентной структуры.

Рассмотрим основные уравнения факторного анализа. Пусть имеется множество индивидов B_i, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, и множество тестов * A_j, где $j = 1, 2, 3, \ldots, m$, причем каждый тест однократно применяется к каждому индивиду, в результате чего получается количественная оценка z_{ji}, см. табл. 7.1.1. Пусть, далее, латентная структура представлена множеством общих факторов F_y, где $y = 1, 2, 3, \ldots, k$.

---

* Множество тестов, определенное для выявления латентной структуры, обычно называют *батареей* тестов.

Таблица 7.1.1

Результаты применения батареи тестов к выборке испытуемых

		Множество индивидов B_i						
		B_1	B_2	B_3	...	B_i	...	B_n
Множество (батарея) тестов A_j	A_1	z_{11}	z_{12}	z_{13}	...	z_{1i}	...	z_{1n}
	A_2	z_{21}	z_{22}	z_{23}	...	z_{2i}	...	z_{2n}
	A_3	z_{31}	z_{32}	z_{33}	...	z_{3i}	...	z_{3n}
	...	...	...	...	...	...	...	...
	A_j	z_{j1}	z_{j2}	z_{j3}	...	z_{ji}	...	z_{jn}
	...	...	...	...	...	...	...	...
	A_m	z_{m1}	z_{m2}	z_{m3}	...	z_{mi}	...	z_{mn}

Тогда *первое основное* уравнение ФА может быть записано следующим образом:

$$z_{ji} = \sum_{y=1}^{k} a_j (F_y) \, b_i (F_y), \qquad (7.1.1)$$

где z_{ji} — оценка, полученная в результате однократного применения j-того теста к i-тому индивиду; $a_j (F_y)$ — заряд y-того фактора в j-том тесте; $b_y (F_y)$ — вес y-ового фактора у i-того индивида. Величины z_{ji}, $a_j (F_y)$ и $b_i (F_y)$ — это обычно величины, центрированные и нормированные своими стандартными отклонениями *.

Второе основное уравнение ФА может быть представлено в нескольких вариантах (см. стр. 379—381). Например, оценки z_{ji} в табл. 7.1.1 можно коррелировать по строкам или по столбцам.

Если, используя коэффициент корреляции Пирсона,** определить, как коррелируют оценки z_{ji} каждого теста с каждым другим (коэффициент корреляции вычисляется между строками табл. 7.1.1), то второе основное уравнение ФА *для каждой пары тестов* имеет вид:

$$r = (A_1 A_2) = \sum_{y=1}^{k} a_1 (F_y) \bullet a_2 (F_y), \qquad (7.1.2)$$

т. е. коэффициент корреляции каждого теста с каждым *другим* тестом рассматривается как скалярное произведение факторных зарядов соответствующей пары тестов.

---

* На практике чаще всего z_{ji} не центрируются и не нормируются, факторные заряды и веса получают в виде основных отклонений в ходе вычислений.

** Существо ФА обычно демонстрируют для коэффициента Пирсона, но факторный анализ можно осуществлять и на основе коэффициентов ранговой корреляции, функционально связанных с пирсоновским.

Аналогично, коррелируя тестовые оценки каждого индивида с каждым другим (корреляция между столбцами табл. 7.1.1), имеем второе основное уравнение ФА *для каждой пары индивидов*:

$$r = (B_1B_2) = \sum_{y=1}^{k} b_1(F_y)\, b_2(F_y). \qquad (7.1.3)$$

Необходимо отметить, что уравнение (7.1.2) справедливо только при условии выполнения постулата 1, а уравнение (7.1.3) — только при выполнении постулата 2.

Из уравнения (7.1.2)* следует, что коэффициент корреляции j-того теста с самим собой — это величина, равная сумме квадратов факторных зарядов данного теста:

$$r = (A_jA_j) = \sum_{y=1}^{k} a_j^2(F_y). \qquad (7.1.4)$$

Величину $r(A_jA_j)$ называют «общностью» или *запасом общей изменчивости*, она представляет собой часть общей дисперсии оценки z_{ji} по j-тому тесту.

Полное уравнение дисперсии в нормированном виде может быть представлено в виде суммы следующих компонентов:

$$1 = r(A_jA_j) + c_j^2(F_j) + \varepsilon_j^2, \qquad (7.1.5)$$

где $r(A_jA_j)$ — запас общей изменчивости; $c_j(F_j)$ — заряд фактора, специфического для j-той переменной; ε_j^2 — остаточная дисперсия оценки z_{ji} по j-тому тесту.

Уравнение (7.1.5) — это *третье основное уравнение факторного анализа*.

Обозначая $r = (A_jA_j) = h_j^2$ и $c_j^2(F_j) + \varepsilon_j^2 = u_j^2$, можем переписать уравнение (7.1.5):

$$h_j^2 + u_j^2 = 1. \qquad (7.1.6)$$

В факторном анализе существенную роль имеет величина h_j^2, которая в подавляющем большинстве случаев априори неизвестна и с трудом может быть определена экспериментально.** Величина u_j^2, в сущности, не имеет в ФА какого-либо значения, кроме того, что по ней определяется окончание процесса извлечения факторов. Тем не менее, на практике ее компонент ε_j^2 всегда присутствует, и его следовало бы суммировать с уравнениями (7.1.2) и (7.1.3):

$$r(A_1A_2) = \sum_{y=1}^{k} a_1(F_y)\, a_2(F_y) + \varepsilon_1\varepsilon_2, \qquad (7.1.7)$$

---

* Так как уравнения (7.1.2) и (7.1.3) формально идентичны, далее в этом пункте существо ФА будем рассматривать на основе (7.1.2).

** Коэффициент корреляции теста с самим собой известен под именем *коэффициента эквивалентности* в случае, если два эквивалентных теста применяются одновременно к одной и той же группе людей, или под именем *коэффициента стабильности*, когда один и тот же тест применяется к двум эквивалентным группам индивидов.

где $\varepsilon_1\varepsilon_2$ — остаточный коэффициент корреляции, обусловленный флуктуациями условий тестирования;

$$r(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2) = \sum_{y=1}^{k} b_1(F_y)\, b_2(F_y) + \varepsilon_1\varepsilon_2, \qquad (7.1.8)$$

где $\varepsilon_2\varepsilon_2$ — остаток, обусловленный флуктуациями внутренней среды организма.

На основании левых частей уравнений (7.1.5) и (7.1.7) может быть написана матрица коэффициентов корреляции,* в которой по главной диагонали записаны единицы. Такая корреляционная матрица называется в ФА «комплектной». Корреляционная матрица, у которой по главной диагонали расположены запасы общей изменчивости (по 7.1.4), называется «сокращенной». Пример комплектной и сокращенной корреляционных матриц приведен в табл. 7.1.2.

Таблица 7.1.2

Комплектная и сокращенная корреляционные матрицы

Комплектная

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & 1 & r_{45} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & 1 \end{bmatrix}$$

Сокращенная

$$\begin{bmatrix} h_1^2 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & h_2^2 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & h_3^2 & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & h_4^2 & r_{45} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & h_5^2 \end{bmatrix}$$

Факторная (латентная) структура, выявляемая по множеству переменных (тестов или индивидов), может быть представлена в виде *матрицы факторных зарядов*,** в которой по строкам указаны переменные (тесты или люди), а по столбцам — факторы (табл. 7.1.3). Строка факторной матрицы представляет факторную структуру переменной, столбец — структуру переменных, измеряющих данный фактор.

Как указывалось, факторы в латентной структуре могут быть общими, групповыми и специфическими. Чаще всего в ФА рассматриваются латентные структуры, имеющие в своем составе

* В дальнейшем, для краткости, просто *корреляционная матрица*.
** Сокращенно: *факторная матрица*.

Таблица 7.1.3

Комплектная и сокращенные факторные матрицы

		Общие факторы F_y			Специфические факторы C_j				
		1	2	3	1	2	3	4	5
Тесты A_j	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_{11}				
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		c_{22}			
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}			c_{33}		
	4	a_{41}	a_{42}	a_{43}				c_{44}	
	5	a_{51}	a_{52}	a_{53}					c_{55}

——— Сокращенная ——— ——— Сокращенная ———

——— Комплектная ———

только общие и специфические факторы *. Факторная матрица, включающая как общие, так и специфические факторы, тоже называется комплектной. Соответственно матрица, включающая только общие или только специфические факторы, называется сокращенной. Пример комплектной и сокращенной факторных матриц приведен в табл. 7.1.3. Отметим, что матрица специфических факторов — это диагональная матрица.

Обобщая второе и третье основные уравнения (7.1.2) и (7.1.5), можем записать *общее основное уравнение факторного анализа в матричной форме*:

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= \sum_{y=1}^{k} R_y + C + E \quad \text{при} \\ R_y &= F_y F'_y. \end{aligned}\right\} \qquad (7.1.9)$$

Здесь R_0 — исходная, обычно комплектная корреляционная матрица, получаемая эмпирически; y — порядковый номер шага ФА, $y = 1, 2, \ldots, k$, где k — количество общих факторов в латентной структуре и одновременно — число шагов по извлечению факторов;** R_y — так называемая y-овая (первая, вторая и т. д.) корреляционная матрица, получаемая в результате y-ового шага ФА; F_y — сокращенная факторная матрица, полученная в результате y-ового шага и содержащая один y-овый столбец факторных зарядов; F'_y — транспозиция матрицы F_y, содержащая одну строку,

* При этом общие факторы в дальнейшем специальными методами (ротации) «расщепляют» до групповых.

** На каждом шаге извлекается один фактор, поэтому количество факторов и число шагов одинаковы.

С — диагональная матрица специфических факторов; Е — матрица ошибок.

Сущность любого из методов факторного анализа состоит в том, чтобы, преобразуя последовательно шаг за шагом исходную корреляционную матрицу R_0, выделить из нее сокращенную факторную матрицу F_k, такую, чтобы выполнялось равенство *

$$R_0 = F_k \cdot F'_k + E, \qquad (7.1.10)$$

где в матрице Е все элементы ε_{ji} не отличались бы статистически значимо от нуля.

7.1.2. Разновидности методов факторного анализа

Методы ФА можно классифицировать по крайней мере по трем основаниям: по направленности, по исходным представлениям о числе общих факторов, по исходным представлениям об ортогональности факторов.

Направленность ФА связана с объектом, в котором исследуется латентная структура, и с условиями, при которых она изучается. В качестве объекта ФА могут выступать множество тестов, множество индивидов, множество случаев. Эти три переменных в сочетаниях по две (табл. 7.1.4) и по две перестановки в каждом сочетании (табл. 7.1.5) образуют шесть видов («техник») ФА. Рассмотрим подробнее, в чем суть шести вариантов ФА, так как это методологически и методически очень существенно.

Таблица 7.1.4

Сочетания переменных и виды ФА

Виды	Тесты	Индивиды	Случаи
I и II	*m*	*n*	1
III и IV	*m*	1	*n*
V и IV	1	*m*	*n*

Примечание. *m* и *n* — не единичные множества.

I вид ФА в сущности «калибрует» батарею тестов на репрезентативной выборке индивидов. При этом обычно требуется выполнять условие: $m \ll n$ — число тестов гораздо меньше числа индивидов. Здесь попарно коррелируются тестовые оценки, полученные усреднением по выборке людей, и выявляется матрица факторных зарядов по тестам.

---

* Это равенство часто и называют в нашей литературе основным уравнением ФА.

Таблица 7.1.5

Направленность видов ФА

	Тесты	Индивиды	Случаи
Тесты	—	I	III
Индивиды	II	—	V
Случаи	IV	VI	—

Примечание. Таблица, как любая матрица, читается, начиная со строки. По строкам расположены переменные, выступающие в качестве объекта исследования; по столбцам — переменные, опосредствующие изучение объектов.

II вид ФА направлен к изучению выборки индивидов, не обязательно репрезентативной, но обязательно с помощью представительной батареи тестов. При этом обычно требуется, чтобы число индивидов было меньше числа тестов: $m > n$. Но это требование далеко не всегда легко, а главное целесообразно выполнять, так как часто возникает необходимость изучить для большой группы людей ограниченный круг свойств, тестируемых, естественно, ограниченным набором тестов. Здесь попарно коррелируются индивидуальные оценки, усредненные по множеству тестов, и выявляется матрица факторных весов по индивидам.

Еще раз подчеркнем различие между I и II видами, которые наиболее распространены на практике. Если I вид ФА отвечает на вопрос о том, как хорошо каждый тест (и батарея тестов в целом) выявляет некоторую латентную структуру, то II вид ФА отвечает на вопрос о том, в какой мере переменные латентной структуры выявляются у данного индивида.

Считается, что если ФА выполняется на одном и том же массиве данных (см. табл. 7.1.1), то I и II виды ФА приводят примерно к одной и той же факторной матрице. Различие остается лишь в интерпретации, согласно указанной специфике этих видов ФА. В этой связи отметим, что и между остальными парами видов (III и IV, V и VI) отношения формально такие же. Поэтому иногда четные виды называют «обратными» в отношении их нечетной пары.

III и IV виды ФА осуществляются на одном индивидууме. Если III вид ФА отвечает на вопрос, какова стабильность каждого теста (и батареи в целом) при многократном применении к одному и тому же индивиду, то IV вид ФА отвечает на вопрос, какова роль повторений в выполнении индивидом каждого теста. Здесь вообще посредством факторных матриц исследуется как бы динамика тестовых оценок (III вид ФА), либо изменчивость латентной структуры индивида на множество случаев (IV вид ФА). Оба эти вида имеют большое значение для дифференциальной психологии.

К сожалению, их применение наталкивается на значительные трудности в связи с тем, что большинство современных тестов не допускает (из-за простоты) повторных, тем более многократных применений к одному и тому же человеку.

V и VI виды ФА осуществляются на одном тесте, многократно применяемом ко множеству индивидов. При этом вскрывается либо динамика латентной структуры от случая к случаю (V вид ФА), либо роль случая (повторения) в изменчивости латентной структуры у множества индивидов (VI вид ФА). Хотя эти два вида ФА почти не используются, сам методологический подход тривиален для психологических наук, в которых повсеместно осуществляется в эксперименте многократное применение одного и того же задания ко множеству испытуемых.

По исходным представлениям о количестве общих факторов в корреляционной матрице R_0 *исторически* выделились три вида ФА: однофакторный (по Спирмену), бифакторный (по Холзингеру), мультифакторный (по Терстону).

В настоящее время считается доказанным, что полная матрица интеркорреляций порядка m может быть факторизована бесчисленным количеством способов с выделением (теоретически) не менее m факторов. Несмотря на это, во многих случаях оказывается выгодным использовать более простые одно- и бифакторные модели ФА, дающие сходные с мультифакторным анализом результаты. Ниже мы подробно рассмотрим однофакторный и мультифакторный методы. *

С точки зрения исходных представлений об ортогональности факторов выделяются два вида ФА: с ортогональными (независимыми) факторами и с облическими (зависимыми) факторами. Это, в сущности, разновидности мультифакторного анализа. Их специфику мы рассмотрим в дальнейшем.

7.1.3. Задачи факторного анализа в психологии

Обычно выделяют две основные задачи ФА в психологических исследованиях. Во-первых, вскрыть латентную структуру и, во-вторых, вскрыть ее так, чтобы она описывалась небольшим числом переменных по сравнению с исходным количеством измеряемых переменных. Но в аспекте шести рассмотренных видов ФА, различающихся направленностью, можно сформулировать задачи более конкретно, как мы это и сделали. Повторим здесь еще раз три из них, основные, по современным возможностям.

1. Определить степень пригодности батареи тестов для выявления некоторой латентной структуры и шкалировать эту батарею.

2. Определить выраженность некоторой латентной структуры у каждого индивида из выборки индивидов.

---

* За недостатком места бифакторная модель Холзингера не будет рассматриваться.

3. Определить динамические особенности некоторой латентной структуры на основе многократного повторного тестирования одного индивида либо многократного применения одного теста ко множеству индивидов.

Решение этих задач является актуальным в настоящее время во всех отраслях психологии.

§ 7.2. ОДНОФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Метод однофакторного анализа предложен Спирменом в ходе обоснования «теории двух факторов» — общего (генерального) и единичного. Комплектная матрица факторов, по Спирмену, представлена в табл. 7.2.1.

Таблица 7.2.1

Однофакторная модель по Спирмену

Показатели	Факторы	
	общий	единичные
1	a_1	c_1
2	a_2	c_2
3	a_3	c_3
.	.	
.	.	. . .
.	.	
n	a_n	c_n

Из табл. 7.2.1. следует, что все показатели (тесты, люди и т. д.) имеют отличающиеся от нуля заряды общего фактора (отсюда и название «общий») и, кроме того, — по одному специфическому фактору.

Процедура извлечения факторных зарядов (факторизации) по методу Спирмена относится лишь к общему фактору и состоит из трех этапов. *На первом* этапе для каждой j-той переменной вычисляются заряды a_j общего фактора по следующей формуле:

$$a_j = \sqrt{\frac{(r)_j^2 - (r^2)_j}{(r)_t - 2\,(r)_j}}\,, \qquad (7.2.1)$$

где $(r)_j$ — сумма всех коэффициентов корреляции в j-том столбце сокращенной корреляционной матрицы (элементы главной диагонали считаются неизвестными и не входят в суммы); $(r)_j^2$ — квадрат предыдущей суммы; $(r^2)_j$ — сумма квадратов всех коэффициентов корреляции в j-том столбце сокращенной корреляционной матрицы; $(r)_t$ — сумма всех коэффициентов корреляции в сокращенной корреляционной матрице.

Определенные таким путем факторные заряды a_j образуют сокращенную факторную матрицу F, в которой всего один столбец и n строк (по числу переменных: $j = 1, 2, \ldots, n$).

На втором этапе ФА по методу Спирмена осуществляется транспонирование факторной матрицы-столбца. Транспонированная матрица F′ содержит одну строку с n столбцами. Далее, согласно уравнению (7.1.9), определяется «репродуцированная» сокращенная корреляционная матрица

$$R_1 = F \cdot F',$$

каждый элемент которой определяется по формуле

$$r^*_{jk} = a_j \cdot a_k, \tag{7.2.2}$$

где r^*_{jk} — репродуцированный коэффициент корреляции; a_j — факторный заряд j-той переменной, a_k — факторный заряд k-той переменной ($j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $j \neq k$).

Третий этап процедуры состоит в определении «остаточной» корреляционной матрицы и проверки возможности рассматривать остаточную матрицу как матрицу погрешностей.

Остаточная корреляционная матрица определяется как разность между исходной и репродуцированной корреляционными матрицами:

$$R_2 = R_0 - R_1, \tag{7.2.3}$$

где R_0 — исходная, R_1 — репродуцированная, R_2 — остаточная корреляционные матрицы. Обозначив элементы остаточной матрицы $\bar{r}_{jk}$, напомним, что они находятся для каждой пары элементов r_{jk} и r^*_{jk} по уравнению

$$\bar{r}_{jk} = r_{jk} - r^*_{jk}. \tag{7.2.4}$$

Далее требуется осуществить проверку равенства

$$R_2 = E, \tag{7.2.5}$$

где E — матрица погрешностей. При проверке обычно исходят из того, что в остаточной матрице, если она действительно образована погрешностями, остаточные коэффициенты корреляции $\bar{r}_{jk}$ распределены нормально со средним значением, равным нулю. Следовательно, достаточно определить стандартное отклонение σ_r и проверить, как велика вероятность того, что максимальное значение остаточного коэффициента корреляции не превзойдет выбранной заранее величины $t_{\alpha/\nu} \cdot \sigma_r$:

$$P\left(|\bar{r}_{jk}|_{\max} \leqslant t_{\alpha/\nu} \cdot \sigma_r\right) = ? \tag{7.2.6}$$

Здесь $|\bar{r}_{jk}|_{\max}$ — максимальный (по модулю) из остаточных коэффициентов корреляции; $t_{\alpha/\nu}$ — квантиль распределения Стьюдента, при заданной вероятности ошибки первого рода (α) и

данном числе степеней свободы (ν). Если вероятность (7.2.6) *достаточно* велика, то отличие $|\bar{r}_{kj}|_{max}$ от нуля можно рассматривать как случайное и, следовательно, для всех $|\bar{r}_{jk}| < |r_{jk}|_{max}$ это тем более справедливо. Тогда можно принять, что (7.2.5) выполняется и остаточную матрицу можно считать образованной погрешностями измерения.

Практически значение $t_{\alpha/\nu}$ в случае ФА принимают равным единице. Тогда, учитывая, что для нормально распределенной переменной X

$$P(|X| \leqslant \sigma_X) \approx 0{,}683 \text{ (см. стр. 135)},$$

ограничиваются проверкой условия

$$|\bar{r}_{jk}|_{max} \leqslant \sigma_r. \qquad (7.2.7)$$

Если оно выполняется, то остаточную матрицу считают за матрицу погрешностей; если же оно не выполняется, то значит в остаточной матрице, наряду с погрешностями, содержатся заряды других общих факторов (по крайней мере одного), которые можно извлечь другими методами факторного анализа.

Величину σ_r можно определить двумя способами. Первый основан на уравнении

$$\sigma_r = (1 - M_r)\sqrt{\frac{5 + 8M_r + 2M_r^2}{2N}}\,. \qquad (7.2.8)$$

Здесь M_r — математическое ожидание величины коэффициентов корреляции в исходной корреляционной матрице (R_o):

$$M_r = \frac{(r_{jk})_t}{n(n-1)},$$

где $(r_{jk})_t$ определено выше как сумма всех коэффициентов корреляции в сокращенной корреляционной матрице; n — число переменных; $n(n-1)$ — число коэффициентов корреляции в сокращенной корреляционной матрице; N — количество испытуемых (в общем случае — число пар коррелируемых значений).

Второй способ основывается на более простой формуле

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{N-1}}, \qquad (7.2.9)$$

где N означает то же самое. σ_r по уравнению (7.2.9) получается примерно на 20% меньше, чем по уравнению (7.2.8). Следовательно, второй способ накладывает более жесткие ограничения на возможность выполниться неравенству (7.2.7), а также является более простым с вычислительной стороны, поэтому его следует предпочесть первому.

Рассмотрим теперь процедуру однофакторного анализа, по Спирмену, на примере.

Таблица 7.2.2

Исходная корреляционная матрица, промежуточные и окончательные данные факторизации к примеру 7.2.1

Показатели	1	2	3	4	5	6
1	—	0,48	0,24	0,33	0,38	0,43
2	0,48	—	0,57	0,56	0,43	0,59
3	0,24	0,57	—	0,37	0,40	0,56
4	0,33	0,56	0,37	—	0,49	0,50
5	0,38	0,43	0,40	0,49	—	0,61
6	0,43	0,59	0,56	0,50	0,61	—
$(r)_j$	1,86	2,63	2,14	2,25	2,31	2,69 $(r)_t = 13{,}88$
$(r)_j^2$	3,460	6,917	4,580	5,062	5,336	7,236
$(r^2)_j$	0,726	1,402	0,993	1,050	1,102	1,469
Числитель	2,734	5,515	3,587	4,012	4,234	5,767
$(2r)_j$	3,72	5,26	4,28	4,50	4,62	5,38
Знаменатель	10,16	8,62	9,60	9,38	9,26	8,50
a_j^2	0,269	0,640	0,374	0,428	0,457	0,678
a_j	0,52	0,80	0,61	0,65	0,68	0,82

Пример 7.2.1.* В исследовании индивидуальных различий при запоминании разных видов материала изучались следующие шесть видов заучиваемого материала: 1) картинки, 2) слова конкретные, 3) слова абстрактные, 4) числа двузначные, 5) числа трехзначные, 6) бессмысленные слоги. Оценкой служило количество повторений, потребовавшихся для полного запоминания.

Таблица 7.2.3

Сокращенная факторная матрица к примеру 7.2.1

Показатели	Заряды общего фактора
1	0,52
2	0,80
3	0,61
4	0,65
5	0,68
6	0,82

Ряды оценок, полученных для 32 испытуемых, коррелировались для каждой пары видов заучиваемого материала. Сокращенная корреляционная матрица порядка 6 представлена в верхней части таблицы 7.2.2. В нижней части таблицы представлены промежуточные и окончательные данные, соответствующие формуле (7.2.1).

Сокращенная факторная матрица F представлена в табл. 7.2.3. Умножая, согласно (7.2.2.), матрицу F на ее транспозицию F′,

* Заимствован из работы Б. М. Теплова «Простейшие способы факторного анализа» (в сб.: «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека», т. V. «Просвещение», М., 1967).

получаем репродуцированную матрицу R_1, она представлена в табл. 7.2.4. Далее, вычитая, согласно (7.2.3) и (7.2.4), матрицу R_1 из исходной корреляционной матрицы R_0, получаем остаточ-

Таблица 7.2.4

Репродуцированная корреляционная матрица, вычисленная как произведение табл. 7.2.3 на ее транспозицию

Показатели	1	2	3	4	5	6
1	—	0,42	0,32	0,34	0,35	0,43
2	0,42	—	0,49	0,52	0,54	0,66
3	0,32	0,49	—	0,40	0,42	0,50
4	0,34	0,52	0,40	—	0,44	0,53
5	0,35	0,54	0,42	0,44	—	0,56
6	0,43	0,66	0,50	0,53	0,56	—

ную матрицу R_2, приведенную в табл. 7.2.5. Выполним для этой матрицы проверку условия (7.2.5). С этой целью двумя способами — по (7.2.8) и (7.2.9) вычислим σ_r.

Таблица 7.2.5

Остаточная корреляционная матрица (получена вычитанием из матрицы 7.2.2. матрицы 7.2.4.)

Показатели	1	2	3	4	5	6
1	—	0,06	—0,08	—0,01	0,03	0,00
2	0,06	—	0,08	0,04	—0,11	—0,07
3	—0,08	0,08	—	—0,03	—0,02	0,06
4	—0,01	0,04	—0,03	—	0,05	—0,03
5	0,03	—0,11	—0,02	0,05	—	0,05
6	0,00	—0,07	0,06	—0,03	0,05	—

Сначала определим оценку математического ожидания M_r для исходной корреляционной матрицы:

$$M_r = \frac{13{,}88}{30} \approx 0{,}46.$$

Тогда

$$\sigma_r = (1 - 0{,}46)\sqrt{\frac{5 + 8 \cdot 0{,}46 + 2 \cdot 0{,}46^2}{2 \cdot 32}} \approx 0{,}2.$$

Максимальное абсолютное значение остаточного коэффициента корреляции из табл. 7.2.5 составляет 0,11. Следовательно, условие (7.2.5) выполняется. По второму способу $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{31}} \approx 0{,}18$, и условие (7.2.5) тоже выполняется. Тем более все другие остаточ-

ные коэффициенты корреляции в табл. 7.2.5 удовлетворяют этому условию. Следовательно, мы можем считать остаточную корреляционную матрицу матрицей погрешностей, а процесс факторизации законченным.

Итак, выделен единственный общий фактор, интерпретируемый как «фактор опосредствованного, осмысленного запоминания».

§ 7.3. МУЛЬТИФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Мультифакторный анализ в основе своей разработан Терстоном и базируется на предположении о наличии в любой корреляционной матрице более чем одного общего фактора, а также групповых и специфических факторов. Мультифакторная модель была представлена выше, в табл. 7.1.3 (для трех общих факторов). Именно для мультифакторного анализа справедливо в общем виде основное матричное уравнение ФА — уравнение (7.1.9).

В отличие от однофакторного анализа мультифакторный анализ не исчерпывается процессом факторизации, а включает еще одну ступень, так называемую «ротацию». Кроме того, процесс факторизации здесь является многошаговым, и число шагов факторизации определяется рядом обстоятельств, требующих дополнительного объяснения. В этой связи, прежде чем переходить к конкретному рассмотрению процедуры одного из наиболее распространенных методов мультифакторного анализа — центроидного — необходимо дать геометрическую интерпретацию корреляционной и факторной матрицам.

7.3.1. Геометрическая интерпретация корреляционной и факторной матриц

Коэффициент корреляции r_{ij} между переменными i и j интерпретируется следующим образом:

$$r_{ij} = h_i \cdot h_j \cdot \cos \alpha_{ij}, \tag{7.3.1}$$

где h_i — длина вектора, изображающего i-тую переменную; h_j — длина вектора, изображающего j-тую переменную; α_{ij} — угол между векторами h_i и h_j.

Запас общей изменчивости для i-той переменной на основании (7.3.1) можно представить как

$$r_{ii} = h_i^2 \cdot \cos \alpha_{ii},$$

где $\cos \alpha_{ii} = 1$ $(\alpha_{ii} = 0)$, т. е. иначе говоря, каждую переменную можно охарактеризовать величиной вектора $h_i \leqslant 1$, определяемого как положительное значение корня квадратного из запаса общей изменчивости по данной переменной. Таким образом, зная или как-либо определяя запасы общей изменчивости по всем переменным, можем определить значения векторов,

характеризующих эти переменные. Далее, пользуясь уравнением (7.3.1), в котором для каждой пары переменных известны значения r_{ij}, а также h_i и h_j, можем определить

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{r_{ij}}{h_i h_j}, \qquad (7.3.2)$$

откуда находится и угол α_{ij}.

Система векторов, длина каждого из которых определяется элементами главной диагонали, а углы между каждой парой которых — остальными элементами корреляционной матрицы, называется *конфигурацией векторов*. Из сказанного ясно, что каждой сокращенной корреляционной матрице однозначно соответствует некоторая конфигурация векторов, и наоборот *.

Факторная матрица геометрически интерпретируется следующим образом. Исходным является предположение об ортогональности факторов. Каждый фактор рассматривается как вектор *единичной* длины, ортогональный всем другим таким же векторам. Таким образом факторы образуют *прямоугольную систему координат* (систему соотнесения), число осей в которой равно числу столбцов в сокращенной матрице факторов. Очевидно, что при более чем трех факторах наглядное изображение системы координат невозможно, но обычно используется плоское представление для всех пар осей.

Факторные заряды j-той переменной геометрически интерпретируются как проекции вектора данной переменной на соответствующие координатные оси. Такая интерпретация основана на представлении факторного заряда как коэффициента корреляции данной переменной с данным фактором и, следовательно, на представлении этого коэффициента корреляции как косинуса угла между вектором переменной и соответствующей осью координат. Дадим для примера геометрическую интерпретацию сокращенной факторной матрицы, представленной в табл. 7.3.1.

Двум факторам, которые считаются независимыми, поставлены в соответствие две перпендикулярные оси единичной длины (рис. 7.3.1). Чтобы получить конфигурацию векторов, воспользуемся факторными зарядами из табл. 7.3.1. Первый вектор имеет факторные заряды 0,7 и 0,3. Следовательно, конец первого вектора в координатах F_1; F_2 — это точка с координатами (0,7; 0,3). Геометрически первый вектор находим, соединяя эту точку с началом координат. Аналитически длину вектора h_1 определяем по теореме Пифагора:

$$h_1^2 = 0{,}7^2 + 0{,}3^2 = 0{,}58,$$

$$h_1 = \sqrt{0{,}58} \approx 0{,}76.$$

---

* Разумеется, это не снимает вопроса о статистической достоверности как самой корреляционной матрицы, так и конфигурации ее векторов.

Первое из этих двух уравнений еще раз поясняет смысл запаса общей изменчивости как суммы квадратов факторных зарядов данной переменной.

Аналогично определяем длины остальных векторов переменных, изображенных на рис. 7.3.1. Можно видеть, что конфигурация векторов задана в сокращенной факторной матрице посредством системы координат и факторных зарядов.

Таким образом, факторная структура, геометрически интерпретирующая факторную матрицу, объединяет конфигурацию векторов с системой координат. Вся сложность вопроса, однако, состоит в том, что в корреляционной матрице система координат заранее никак не определена: не определены ни число факторов (осей соотнесения), ни величины факторных зарядов. Методов факторизации существует много, и в результате каждого получается факторная матрица, по-своему ориентирующая координатные оси относительно конфигурации векторов. Из рис. 7.3.1 легко видеть, что вращая систему координат вокруг начала отсчета, можно получить бесконечное разнообразие проекций конфигурации векторов на оси координат, следовательно, существует бесконечно большое количество факторных матриц, отличающихся по крайней мере величинами факторных зарядов (не говоря уже о числе осей). Очевидно, чтобы избавиться от множества решений, необходимо наложить какие-то ограничения, позволяющие выбрать одно единственное решение. Это в мультифакторном анализе и достигается путем ротации.

Таблица 7.3.1

		Факторы	
		1	2
Переменные	1	0,7	0,3
	2	0,9	0,0
	3	0,4	0,6
	4	0,6	0,3

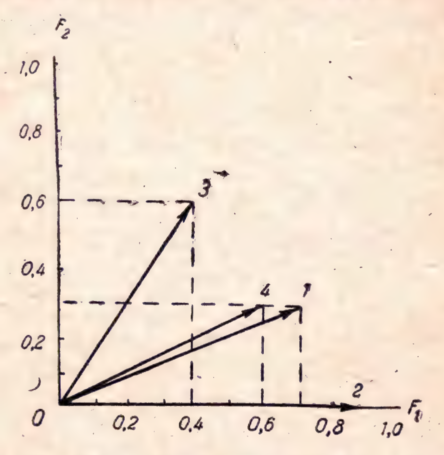


Рис. 7.3.1. Факторная структура по табл. 7.3.1.

F_1 и F_2 — первый и второй факторы соответственно; *1—4* — векторы переменных.

7.3.2. Центроидный метод факторизации

Среди других методов центроидный метод факторизации является наиболее распространенным. Он основывается на том, чтобы каждую ось соотнесения проводить через «центр тяжести»

конфигурации векторов, отсюда и название метода. Смысл центроидного метода поясняется рис. 7.3.2. Рассматривая окончания векторов в конфигурации как систему материальных точек, можно определить центр тяжести (центроид) этой системы (точка S_1 на рис. 7.3.2). Тогда ось первого фактора проводится через две точки: начало конфигурации векторов (точка O на рис. 7.3.2) и точку S_1.

В случае, если мы имеем дело с двумерной системой латентных переменных, в которой конфигурация векторов лежит в одной плоскости, алгебраическая сумма проекций векторов на ось второго фактора (F_2 на рис. 7.3.2), перпендикулярную к первой и лежащую в той же плоскости, будет равна нулю. Такое положение системы координат называется *центроидным*. Отсюда происходят специальные термины: центроидный метод, центроидные факторы, центроидная ось.

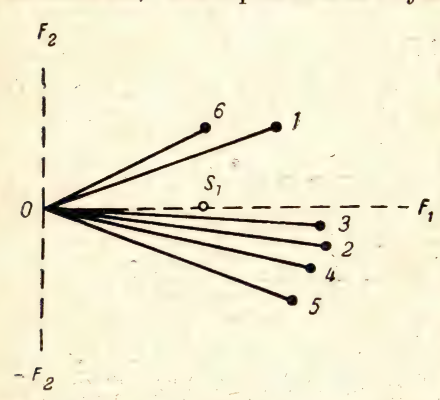


Рис. 7.3.2. Пояснение смысла центроидного метода.

S_1 — центроид конфигурации векторов 1—6; F_1 — ось первого фактора; F_2 — ось второго фактора.

Алгоритм факторизации центроидным методом имеет циклическую структуру, в которой столько циклов (шагов), сколько общих факторов можно извлечь из корреляционной матрицы, согласно уравнению (7.1.9). Каждый цикл (кроме последнего) состоит из четырех этапов. Первые три по смыслу те же, что и при однофакторной модели, а четвертый обусловлен спецификой центроидного метода мультифакторной модели.

Первый этап — извлечение i-того фактора — осуществляется по уравнению

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \sum_j r_j, \qquad (7.3.3)$$

где a_{ij} — заряд i-того фактора в j-той переменной; $\sum_j r_j$ — сумма коэффициентов корреляции в j-том столбце, включая *запас общей изменчивости* h_j^2; T — сумма всех коэффициентов корреляции в матрице, включая запасы общей изменчивости. Для проверки вычисляют $\sum_j a_{ij}$ и проверяют выполнение приближенного равенства $\sum_j a_{ij} \approx \sqrt{T}$.

Из формулы (7.3.3) с очевидностью следует, что исходная

корреляционная матрица должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_j r_j \neq 0, \\ &T > 0, \\ &h_j^2 > 0 \text{ для всех } j. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.4)$$

Кроме того, необходимы точные значения запасов общей изменчивости h_j^2, которые существенно влияют на величину a_{ij}. Требования (7.3.4) выполнить нелегко. Во-первых, как мы видели (рис. 7.3.2), после извлечения каждого центроидного фактора $\sum_j r_j = 0$. Во-вторых, даже исходная корреляционная матрица может содержать такое количество отрицательных значений r_{ij}, что T будет отрицательным. В-третьих, мы заранее не знаем точных значений h_j^2.

Чтобы выполнялись первые два условия из (7.3.4), к остаточной матрице всегда, а к исходной по необходимости, применяется специальное *преобразование* (обращение) *матрицы* *. Чтобы выполнить третье условие из (7.3.4), надо приближенно (но как можно лучше, точнее) определить значения h_j^2. С этого обычно и приходится начинать первый этап факторизации.

Для определения *запасов общей изменчивости* существует несколько методов. Простым и наиболее употребительным является метод наивысшей корреляции. Он состоит в том, что в качестве h_j^2 принимается абсолютная величина максимального коэффициента корреляции в j-том столбце. Основанием является тот факт, что длина вектора с наибольшим приближением определяется через его проекцию на ближайший к нему вектор. Точность метода, однако, зависит от порядка матрицы и характера распределения значений коэффициентов корреляции в столбце. Для матриц порядка более 10 этот метод считается достаточно хорошим. Метод наивысшей корреляции дает *переоценку* запаса общей изменчивости в столбцах с относительно большим числом низких коэффициентов корреляции и дает *недооценку* h_j^2 в столбцах с большим числом высоких r_{ij}. В случае, если значения $(h_j^2)^*$, вычисленные после извлечения всех общих факторов, значительно отличаются ** от исходных, определявшихся по методу наивысшей корреляции, процедуру факторизации повторяют заново,

* Оно все-таки чаще применяется к остаточным матрицам, поэтому мы рассматриваем его как составляющее четвертый этап факторизации.

** Так как h_j^2 имеет смысл дисперсии, то проверить, существенно ли или случайно отличаются величины $h_j^2 = |r_{ij}|_{max}$ и $(h_j^2)^*$ можно, используя дисперсионное отношение Фишера: $F_{\alpha/f_1, f_2} = h_j^2/(h_j^2)^*$ при $h_j^2 > (h_j^2)^*$ и $F_{\alpha/f_1, f_2} = (h_j^2)^*/h_j^2$ при $h_j^2 < (h_j^2)^*$. Значения $f_1 = f_2$ равны числу коррелировавшихся пар.

взяв в качестве исходных значения $(h_j^2)^*$. Этот процесс повторяется столько раз, сколько необходимо для «сходимости» значений $(h_j^2)^*$ к некоторой постоянной величине (пределу), принимаемой за «истинное» значение h_j^2.

Второй этап — получение репродуцированной и остаточной матриц — выполняется так же, как и при однофакторной модели. Согласно уравнению (7.2.2), умножая каждый элемент факторной матрицы-столбца, полученной на y-овом шаге, на каждый элемент ее транспозиции (матрица — строка), получают репродуцированную матрицу y-ового шага. Далее поэлементно по уравнению

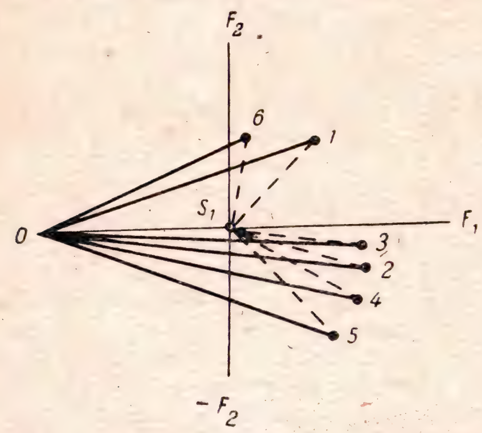


Рис. 7.3.3. Геометрическая интерпретация остаточной матрицы.

Перенося начало отсчета из точки O в центроид S_1, мы изменяем длину векторов *1—6*, которые в новой системе отсчета обозначены пунктиром. Видно, что длины векторов уменьшаются пропорционально уменьшению их проекции на ось F_1, но при этом проекции на ось F_2 не изменяются.

(7.2.4) определяют y-овую остаточную матрицу. Важно отметить, что диагональные элементы $(h_j^2)_y^*$ записываются отдельно, а в остаточной матрице по главной диагонали располагают опять максимальные по абсолютной величине значения остаточных коэффициентов корреляции соответствующих столбцов. Правильность вычислений проверяют приближенным выполнением равенства $\sum_j r_j \cong 0$ для каждого столбца остаточной матрицы.

Геометрическая интерпретация остаточной матрицы ясна из рис. 7.3.3: перенося начало отсчета в центроид S_1, получают новые значения векторов (на рис. 7.3.3 изображены пунктиром).

Третий этап — проверка возможности дальнейшего извлечения факторов — тоже выполняется аналогично однофакторной модели Спирмена. Здесь чаще всего используются, во-первых, уже рассмотренный критерий (7.2.9), причем считается, что факторизацию можно продолжать, если произведение двух максимальных факторных зарядов y-ового фактора по крайней мере вдвое больше σ_r *, во-вторых, специальный критерий Саундерса и, в-третьих, уравнения Терстона.

---

* Согласно В. Д. Небылицыну, $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{N}}$, но, очевидно, при $N < 100$ лучше использовать уравнение (7.2.9).

Использование критерия Саундерса сводится к следующему. Вычисляются три величины:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2n}{n-1} \sum_{ij} \bar{r}_{ij}^2, \\ B &= \left(\frac{n-y}{n} \right)^2, \\ C &= \frac{1}{N} \left(n - \sum_{ik} F_{yi}^2 \right)^2, \end{aligned}\right\} \quad (7.3.5)$$

где n — число переменных; N — число коррелировавшихся пар (объем выборки); y — количество общих факторов, выделенных за y шагов факторизации; $\bar{r}_{ij}$ — остаточные коэффициенты корреляции после извлечения y-ового фактора F_y; $\sum_{ij} \bar{r}_{ij}^2$ — сумма квадратов $\bar{r}_{ij}$ (без запасов общей изменчивости) во всей остаточной матрице; F_{yi} — факторный заряд y-ового фактора в i-той переменной; $\sum_{ik} F_{yi}^2$ — сумма квадратов всех факторных зарядов в матрице факторов после извлечения y-ового фактора. Далее проверяется условие Саундерса:

$$\begin{gathered} \text{факторизация закончена, если } A < BC, \\ \text{факторизацию следует продолжать, если } A > BC. \end{gathered} \quad (7.3.6)$$

Для прекращения факторизации и для априорного определения порядка корреляционной матрицы, необходимой для извлечения m факторов, Терстоном предложены уравнения, связывающие порядок матрицы n и минимальное число общих факторов m, которое можно извлечь из матрицы порядка n:

$$\left.\begin{aligned} n &= 0{,}5\left(2m + 1 + \sqrt{8m+1}\right), \\ m &= 0{,}5\left(2n + 1 - \sqrt{8n+1}\right), \end{aligned}\right\} \quad (7.3.7)$$

где получаемые n и m округляются до ближайшего целого значения. Для $n \leqslant 15$ значения m приведены в табл. 7.3.2. Принято считать, что на практике лучше всегда превзойти минимальный порядок матрицы, необходимый для определения данного числа факторов.

Таблица 7.3.2

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	3	5	6	8	9	10	12	13	14	15

Рассмотренные критерии прекращения факторизации не дают, как мы покажем на примере, однозначного решения. Наиболее «жестким» является первый (правило двух стандартных

отклонений). Наименее «жестким» является критерий Саундерса, он позволяет извлечь наибольшее количество факторов. Уравнения Терстона занимают промежуточное положение и используются чаще всего.

Четвертый этап — «обращение» (преобразование) остаточной матрицы, необходимое для выполнения требования (7.3.4). Существуют разные методы обращения. Один из них приведен в работе В. Д. Небылицына *. Мы на примере рассмотрим более простой (с точки зрения возможных ошибок) аналитический метод. Здесь важно отметить, что смысл любого из методов обращения

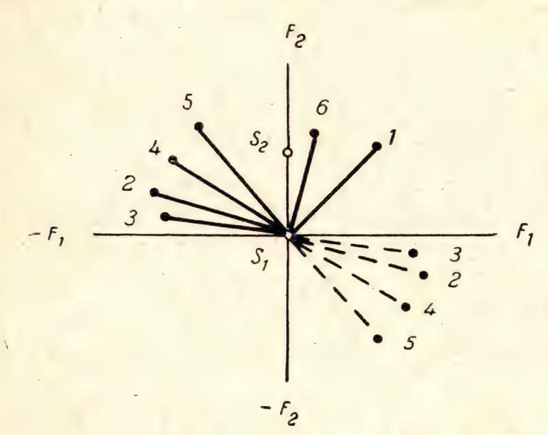


Рис. 7.3.4. Геометрический смысл обращения остаточной матрицы.

Пунктиром изображены векторы, имеющие отрицательные проекции на ось второго фактора ($-F_2$). Сплошной линией (во втором квадранте) обозначены те же векторы после обращения. S_2 — новый центроид, в который будет перенесено начало отсчета после извлечения второго фактора (начало отсчета для геометрической интерпретации второй остаточной матрицы).

геометрически сводится к тому, чтобы часть векторов из конфигурации, соответствующей остаточной матрице, имеющих отрицательные значения проекций на ось $y+1$-го ортогонального фактора, повернуть относительно y-ового центроида на 180°. Пояснение дается на рис. 7.3.4. Очевидно, что в обращенной остаточной матрице для тех коэффициентов корреляции, которые соответствуют обращавшимся векторам, знаки должны быть изменены на противоположные. Правила изменения знаков рассмотрим в примере.

Циклическая процедура факторизации прекращается на третьем этапе некоторого y-ового цикла, когда проверка показывает, что больше факторов извлечь нельзя. В результате получается сокращенная матрица факторов, имеющая y столбцов. Для проверки удовлетворительности факторизации необходимо, умножая окончательную сокращенную матрицу факторов на ее транспозицию, получить репродуцированную матрицу и, вычитая ее из исходной сокращенной корреляционной матрицы, найти остаточную матрицу, все элементы которой должны быть близки к нулю.

* В. Д. Небылицын. Современное состояние факториального анализа. «Вопросы психологии», 1960, № 4.

Выше указывалось, что сокращенную факторную матрицу можно рассматривать как одну из возможных реализаций факторной структуры, причем не самую лучшую. Чтобы в определенном смысле улучшить (упростить) факторную структуру, полученную центроидным (или другим) методом, вращают систему координат (или отдельные оси) относительно конфигурации векторов.

7.3.3. **Простая латентная структура и ротация**

Для определения *наилучшей* позиции системы координат относительно конфигурации векторов предложено немало критериев.

Во-первых, можно руководствоваться тенденцией к согласованию результатов ФА с результатами, полученными другими методами.

Во-вторых, можно стремиться согласовать свои результаты с результатами других исследователей, применявших ФА.

В-третьих, можно стремиться к получению совокупности факторных зарядов, соответствующих каким-то общим положениям данной психологической дисциплины.

В-четвертых, можно стремиться к тому, чтобы оси соотнесения проходили через центроиды «пучков» корреляций, если таковые имеются в конфигурации векторов.

В-пятых, можно руководствоваться принципом «простой структуры», выдвинутым Терстоном. В основе концепции «простой структуры» лежит мысль о том, что из нескольких гипотез, одинаково хорошо объясняющих факты, следует выбирать наиболее простую, требующую наименьшего числа вспомогательных гипотез. Простота латентной структуры состоит в том, что каждая переменная имеет относительно простое факторное содержание, т. е. доминирует заряд одного какого-то фактора и, наоборот: «мерой» данного фактора являются только некоторые (а не все) переменные из анализируемой совокупности. Иными словами, идея простой структуры реализуется в том, чтобы, вращая оси координат, «расщепить» общие факторы до системы групповых.

Конкретно, стремясь к простой структуре, руководствуются следующими положениями: 1) вращая координатные оси, получить наибольшее возможное число *максимальных по модулю* факторных зарядов; 2) получить наибольшее число *нулевых* (близких к нулю, в пределах $\pm\ \sigma_r$) факторных зарядов. Таким образом, максимум для одних факторных зарядов и минимум для других — вот критерии «простой структуры», по которым осуществляется ротация. Нетрудно видеть, что критерии противоречивы, и конкретное решение обычно требует компромисса.

Математический смысл ротации — это поворот ортогональной системы координат относительно неизменного начала отсчета

на некоторый угол φ. При допущении, что факторы облические, ротации подвергают отдельные оси координат.

Рассмотрим существо процедуры *ортогональной* ротации *, которую ниже поясним на примере. Ортогональная ротация двумерной системы сводится к двум этапам. Первый — определение угла φ, на который следует повернуть систему координат в плоскости, для того чтобы по возможности удовлетворялись критерии «простой структуры». При вычислениях вручную это проделывается геометрически на чертеже. Второй этап — вычисление новых значений факторных зарядов. Геометрически эта задача решается достаточно просто и точно следующим образом.

На стекло с яркой подсветкой снизу накладывается начерченная в удобном крупном масштабе на кальке конфигурация векторов. Прямоугольная система двух координатных осей, вычерченная в том же масштабе (длина оси полагается равной единице!) на миллиметровой бумаге, накладывается сверху; начало координат и начало конфигурации векторов совмещаются. Далее, вращают миллиметровую бумагу, стремясь удовлетворить требованиям «простой структуры» (или каким-либо другим из рассмотренных). Найдя искомое положение осей, по миллиметровке на осях отмечают новые проекции концов всех векторов конфигурации, которые затем определяют (по миллиметровке же) в числовом виде. Эти новые проекции и образуют сокращенную факторную матрицу *после ротации.*

Аналитическая процедура вычисления факторных зарядов после поворота системы на угол φ сводится к умножению исходной сокращенной факторной матрицы на так называемую *матрицу поворота* **. Элементами матрицы поворота являются синусы и косинусы (с учетом их знаков) из известных формул для новых координат при повороте двумерной системы против часовой стрелки:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (7.3.8)$$

где x, y — старые координаты (x — абсцисса, y — ордината); x', y' — новые координаты; φ — угол поворота против часовой стрелки.

---

* Облическая ротация сложнее ортогональной не только по процедуре, но, главным образом, по интерпретации получаемых факторных зарядов. Ее рассмотрение выходит за рамки данной работы.

** П. С. Александров (Лекции по аналитической геометрии. «Наука», М., 1968, стр. 191) называет эту матрицу «матрицей преобразования координат», что широко, так как понятие преобразования включает и перенос.

Таким образом, матрица поворота (λ) для двух факторных осей (x и y) имеет вид*:

$$\lambda = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}. \qquad (7.3.9)$$

Зная φ, элементы матрицы (7.3.9) легко определить по таблицам тригонометрических функций.

При количестве осей в системе координат более двух элементы матрицы поворота вычисляются следующим образом. Сначала записывается матрица «нулевого» поворота (λ_0) — это единичная матрица **, порядок которой равен числу факторов (m). Например, для пяти факторов:

$$\lambda_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пусть факторные оси нумеруются слева направо и сверху вниз: $i = 1, 2, 3, 4, 5$ и требуется повернуть пару осей i, k (где $k = 1, 2, 3, 4, 5$, но $i \neq k$) на угол φ_j, где j — номер последовательно осуществляемых поворотов ($j = 1, 2, \ldots, (m - 1)$). Тогда, удаляя из матрицы λ_0 все строки и столбцы, кроме соответствующих осям i и k, получаем подматрицу $\lambda_0^{(i,k)}$. Это тоже единичная матрица: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Умножая ее на матрицу поворота осей λ (7.3.9) (от чего λ не изменится) и дополняя λ удаленными ранее из λ_0 столбцами и строками, получаем матрицу j-того поворота осей i, k ($\lambda_j^{(i,k)}$).

Например, желая повернуть оси 2 и 4, находим подматрицу

$$\lambda_0^{(2,4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

и, умножая ее на матрицу λ, получаем

$$\lambda_0^{(2,4)} \cdot \lambda = \begin{vmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{vmatrix}$$

---

* При повороте на отрицательный угол (по часовой стрелке) матрица поворота транспонируется:

$$\lambda' = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

** Элементами матрицы поворота являются так называемые «направляющие косинусы», характеризующие положение системы координат. Для каждой оси в m-мерной системе этих косинусов m. При нулевом повороте (угол поворота 0°) косинус угла со своей осью равен единице, а со всеми другими (в прямоугольных координатах) — нулю.

Дополняя произведение удаленными ранее строками и столбцами матрицы λ_0, окончательно получаем матрицу поворота осей 2 и 4:

$$\lambda_j^{(2,4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_j & 0 & \sin\varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_j & 0 & \cos\varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогичным путем получаем матрицу l-го поворота двух других осей, например, 3 и 5:

$$\lambda_l^{(3,5)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_l & 0 & \sin\varphi_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\varphi_l & 0 & \cos\varphi_l \end{vmatrix}.$$

Допустим, $l = j + 1$, т. е. повороты осуществляются последовательно, сначала j-тый, а потом l-ный. Используя ассоциативность умножения матриц,можем сразу осуществить оба указанных поворота. При этом матрица совместного поворота двух пар осей определяется умножением слева матрицы $\lambda_j^{(2,4)}$ на матрицу $\lambda_l^{(3,5)}$:

$$\lambda_{(j \wedge l)}^{(2,4 \wedge 3,5)} = \lambda_j^{(2,4)} \cdot \lambda_l^{(3,5)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_j & 0 & \sin\varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_l & 0 & \sin\varphi_l \\ 0 & -\sin\varphi_j & 0 & \cos\varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\varphi_l & 0 & \cos\varphi_l \end{vmatrix},$$

где φ_j и φ_l — углы j-того и l-го поворотов. Если бы потребовалось последовательно осуществить еще один поворот, для которого получена матрица $\lambda_q^{i,k}$, то новая матрица совместного поворота определялась бы произведением слева:

$$\lambda_{(j \wedge l \wedge q)}^{(2,4 \wedge 3,5 \wedge i,\, k)} = \lambda_{(j \wedge l)}^{(2,4 \wedge 3,5)} \cdot \lambda_q^{(i,\, k)}.$$

В случае m-мерной системы ортогональная ротация сводится к попарному вращению осей; число возможных последовательных вращений $(m - 1)$. Важно отметить, что практически при $m > 5$ осуществление ротации вручную затруднительно и следует использовать ЭВМ.

После ротации вновь осуществляется проверка: умножая *факторную матрицу после ротации* на ее транспозицию, определяют репродуцированную матрицу и сравнивают ее как с исходной, так и с репродуцированной матрицей до ротации.

7.3.4. Пример мультифакторного анализа с ортогональной ротацией

Для иллюстрации мультифакторного анализа рассмотрим конкретный числовой пример, полученный в реальном исследовании, в котором батарея из шести тестов применялась к группе учащихся профессиональной школы *. В результате попарного коррелирования оценок по тестам (1-й методический вариант ФА) получена сокращенная корреляционная матрица, приведенная в табл. 7.3.3.

Так как все коэффициенты корреляции в исходной матрице положительны, можем непосредственно приступить к вычислению первого центроидного фактора. Для этого сначала заполним главную диагональ значениями запасов общей изменчивости, в качестве которых выберем в каждом столбце максимальное значение коэффициента корреляции (как это сделано в табл. 7.3.3). Вычисления зарядов первого центроидного фактора, согласно уравнению 7.3.3, а также необходимые проверки (равенство сумм по строкам и столбцам и равенство $\sum_j a_{ij} \approx \sqrt{T}$) приведены тоже в табл. 7.3.3.

Таблица 7.3.3

Исходная сокращенная матрица корреляций и результаты вычисления зарядов первого центроидного фактора

Переменные	1	2	3	4	5	6	$\sum_j r_j$
1	0,400	0,299	0,400	0,297	0,116	0,232	1,744
2	0,299	0,568	0,568	0,534	0,432	0,154	2,555
3	0,400	0,568	0,568	0,487	0,436	0,071	2,530
4	0,297	0,534	0,487	0,545	0,545	0,092	2,500
5	0,116	0,432	0,436	0,545	0,545	0,016	2,058
6	0,232	0,154	0,071	0,092	0,016	0,232	0,765
$\sum_j r_j$	1,744	2,555	2,530	2,500	2,058	0,765	$T =$ = 12,152
a_{1j}	0,500	0,733	0,726	0,717	0,590	0,219	
$\sqrt{T} = 3{,}486$; $\sum_j a_{1j} = 3{,}485$							

Умножая матрицу-столбец полученных факторных зарядов на ее транспозицию, определяем первую репродуцированную матрицу, она приведена в табл. 7.3.4. Вычитая поэлементно первую репродуцированную матрицу из исходной корреляционной

* Заимствован из кн.: Okón Jan. Analiza czynnikowa w psychologii. Panstwowe wydawnictwo naukowe. Warszawa, 1960.

Таблица 7.3.4

Первая репродуцированная матрица

j		1	2	3	4	5	6
j	a_{1j}	0,500	0,733	0,726	0,717	0,590	0,219
1	0,500	0,250	0,386	0,363	0,358	0,295	0,110
2	0,733	0,386	0,537	0,532	0,526	0,432	0,160
3	0,726	0,363	0,532	0,527	0,520	0,428	0,159
4	0,717	0,358	0,526	0,520	0,514	0,423	0,157
5	0,590	0,295	0,432	0,428	0,423	0,384	0,129
6	0,219	0,110	0,160	0,159	0,157	0,129	0,048

матрицы, определяем первую остаточную матрицу, она приведена в табл. 7.3.5. Суммируя по столбцам, убеждаемся в том, что центрирование выполнено безошибочно: суммы на порядок меньше значений остаточных коэффициентов корреляции, т. е. практически равны нулю. Геометрическая интерпретация полученной остаточной матрицы как раз и была дана на рис. 7.3.3.

Таблица 7.3.5

Первая остаточная корреляционная матрица

j	1	2	3	4	5	6
1	(0,150)	—0,067	0,037	—0,061	—0,179	0,123
2	—0,067	(0,031)	0,036	0,009	0,000	—0,006
3	0,037	0,036	(0,041)	—0.033	0,008	—0,088
4	—0,061	0,009	—0,033	(0,031)	0,122	—0,065
5	—0,179	0,000	0,008	0,122	(0,197)	—0,145
6	0,123	—0,006	0,088	0,065	—0,145	(0,185)
$\sum_j \bar{r}_j$	0,003	0,003	0,001	0,003	0,003	0,004

Теперь следует убедиться, можно ли продолжать факторизацию. Прежде всего, пользуясь табл. 7.3.2, устанавливаем, что из корреляционной матрицы порядка 6 можно извлечь три общих фактора. Однако с целью демонстрации применим также критерии «стандартного отклонения» и критерий Саундерса.

Число коррелировавшихся пар $N = 133$, поэтому $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{132}} \approx$ $\approx \frac{1}{11,5} \approx 0,087$. Можно видеть, что несколько остаточных коэффициентов корреляции из табл. 7.3.5 по модулю превосходят $2\sigma_r = 0,174$.

Применим критерий Саундерса. По формулам (7.3.5) вычисляем:

$$A = \frac{2 \cdot 6}{6-1} 0{,}213 \cong 2{,}4 \cdot 0{,}213 \cong 0{,}511,$$

$$B = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cong 0{,}694,$$

$$C = \frac{1}{133}(6 - 2{,}26)^2 \cong \frac{13{,}988}{133} \cong 0{,}105,$$

$$BC \cong 0{,}073 \ll A \cong 0{,}511,$$

т. е., следуя правилу (7.3.6), факторизацию можно продолжить. Но для этого необходимо обеспечить выполнение условий (7.3.4) и преобразовать первую остаточную матрицу для получения положительных сумм по столбцам. Наиболее простой алгоритм преобразования (обращения) состоит в следующем.

1. Вычисляем алгебраические суммы всех столбцов, не учитывая запасы общей изменчивости; эти суммы записываем в строке S табл. 7.3.6 и 7.3.7.

Таблица 7.3.6

Преобразование первой остаточной корреляционной матрицы

Переменные	1	2*	3*	4*	5*	6
1	0,179 (0,150)	(+) −0,067	(−) 0,037	(+) −0,061	(+) −0,179	0,123
2*	(+) −0,067	0,067 (0,031)	0,036	0,009	0,000	(+) −0,006
3*	(−) 0,037	0,036	0,088 (0,041)	−0,033	0,008	(+) −0,088
4*	(+) −0,061	0,009	−0,033	0,122 (0,031)	0,122	(+) −0,065
5*	(+) −0,179	0,000	0,008	0,122	0,179 (0,197)	(+) −0,145
6	0,123	(+) −0,006	(+) −0,088	(+) −0,065	(+) −0,145	0,145 (0,185)
S	−0,147	−0,028	−0,040	−0,028	−0,194	−0,181
$-0{,}5S$	0,0735	0,0140	0,0200	0,0140	0,0970	0,0905
$+5^*$	−0,1055	0,0140	0,0280	0,1360	0,0970	−0,0545
$+4^*$	−0,1665	0,0230	−0,0050	0,1360	0,2190	−0,1195
$+2^*$	−0,2335	0,0230	+0,0310	0,1450	0,2190	−0,1255
$+3^* = B$	−0,1965	0,0590	0,0310	0,1120	0,2270	−0,2135
$-2B$	0,393	(−) 0,118	(−) 0,062	(−) 0,224	(−) 0,454	0,427
$\|2B\| + h_j^2$	0,572	0,185	0,150	0,346	0,633	0,572

Примечание. S — суммы по столбцам без запасов общей изменчивости. B — последняя из обращенных строк, она содержит накопленные суммы (S),

$$|2B| + h_j^2 = \sum_j r_j .$$

Таблица 7.3.7

Вторая остаточная матрица корреляций и ее преобразование

Переменные	1	2*	3*	4	5	6*
1	0,072	(−) 0,024	(+) −0,072	−0,019	0,032	(+) −0,010
2*	(−) 0,024	0,047	0,025	(+) −0,016	(+) −0,047	−0,037
3*	(+) −0,072	0,025	0,072	(+) −0,054	(+) −0,030	0,054
4	−0,019	(+) −0,016	(+) −0,054	0,054	0,033	(+) −0,015
5	0,032	(+) −0,047	(+) −0,030	0,033	0,047	(+) −0,002
6*	(+) −0,010	−0,037	0,054	(+) −0,015	(+) −0,002	0,054
S	−0,045	−0,051	−0,077	−0,071	−0,014	−0,010
$-0,5S$	0,0225	0,0255	0,0385	0,0355	0,0070	0,0050
$+3^*$	−0,0495	0,0505	0,0385	−0,0185	−0,0230	0,0590
$+2^*$	−0,0255	0,0505	0,0635	−0,0345	−0,0700	0,0220
$+6^* = B$	−0,0355	0,0135	0,1175	−0,0495	−0,0720	0,0220
$-2B$	0,071	(−) 0,027	(−) 0,235	0,099	0,144	(−) 0,044
$\|2B\| + h_j^2$	0,143	0,074	0,307	0,153	0,191	0,098

Примечание. Обозначения те же, что и в табл. 7.3.6. Запасы общей изменчивости (подчеркнуты дважды) получены по методу наивысшей корреляции.

2. Заполняем строку $-0,5S$.

3. В строке $-0,5S$ находим *наибольшую положительную величину.** Соответствующий этой величине столбец будет обращен в первую очередь. Это столбец переменной 5, обозначим его звездочкой.

4. Обозначая звездочкой строку переменной 5, складываем ее со строкой $-0,5 \cdot S$, не учитывая значения h_5^2. Результаты записываем в строку $+5^*$. Коэффициент, лежащий на пересечении $+5^*$-й строки и столбца 5^*, подчеркиваем прямой линией, слева от этого числа проводим вниз прямую линию, как показано в табл. 7.3.6.

5. В полученной строке $+5^*$ снова находим наибольшее положительное значение. Для соответствующего столбца и строки выполняем предписание предыдущего пункта 4. В результате получаем строку $+4^*$ табл. 7.3.6.

6. В полученной строке $(+4^*)$ снова находим наибольшее положительное значение (при этом значения, лежащие в уже

* Ошибки не будет, если вместо наибольшей выбрать одну из больших положительных величин (см. табл. 7.3.7, строку $+3$).

обращенных столбцах, обозначенных прямыми линиями, не учитываются) и для него повторяем предписание пункта 4.

7. Сложение строк, согласно пункту 4, повторяется до тех пор, пока в последней строке не получим большинство отрицательных величин (не считая уже обращенных столбцов). Эту последнюю строку обозначим B.

8. Удваиваем все элементы строки B и изменяем их знаки на противоположные. Результаты записываем в строку $-2B$. Это суммы столбцов после обращения переменных. Отрицательные знаки заключаем в скобки, как показано в табл. 7.3.6.

9. Вычерчиваем (или заключаем в скобки, как это сделано в табл. 7.3.5 и 7.3.6) остаточные запасы общей изменчивости и над ними записываем новые значения, определенные из числа остаточных коэффициентов корреляции соответствующих столбцов по методу наивысшей корреляции.

10. Изменяем алгебраические знаки в матрице остаточных коэффициентов корреляции в соответствии с преобразованиями:

— изменяем на противоположные знаки всех коэффициентов в преобразованных строках, за исключением лежащих на пересечении с преобразованными столбцами;

— изменяем на противоположные знаки всех коэффициентов в преобразованных столбцах, за исключением лежащих одновременно в преобразованных строках.

В табл. 7.3.6 измененные знаки записаны сверху в скобках. Значения остаточных коэффициентов корреляции с измененными знаками и новые запасы общей изменчивости образуют преобразованную (обращенную) остаточную корреляционную матрицу.

11. Складывая абсолютные значения $|2B|$* и новые запасы общей изменчивости h_j^2, получаем суммы $\sum_j r_j$, необходимые для вычисления зарядов второго фактора по уравнению (7.3.3). Для проверки правильности вычислений эти же суммы получаем, непосредственно суммируя по столбцам преобразованную остаточную корреляционную матрицу.

Вычислив факторные заряды, необходимо определить их знаки. Для этого имеется общее правило.

Знак факторного заряда y-ового фактора i-той переменной, которая *не была преобразована или была преобразована четное число раз*, сохраняется таким, каким он был для заряда первого фактора этой переменной. Знак факторного заряда переменной, *преобразованной нечетное число раз*, изменяется на противоположный по сравнению со знаком заряда первого фактора **.

* Геометрический смысл этих абсолютных значений, а также преобразованной остаточной матрицы ясен из рис. 7.3.4.

** Относительно знака заряда предыдущего (y — 1-го) фактора знак заряда y-ового фактора i-той переменной не изменяется, если переменная не была преобразована, или изменяется на противоположный, если переменная была преобразована на y-овом шаге факторизации.

В нашем примере переменные 2—5 были преобразованы нечетное число (один) раз, а переменные 1 и 6 — не преобразованы. Поскольку все заряды первого фактора были положительны, заряды второго фактора у переменных 1 и 6 сохранят положительные знаки, а у переменных 2—5 получат отрицательные знаки (см. табл. 7.3.8).

Таблица 7.3.8

Факторная матрица после вычисления зарядов второго и третьего факторов

Переменные	Факторы		
	F_1	F_2	F_3
1	0,500	0,365	0,145
2	0,733	—0,118	0,075
3	0,726	—0,095	0,312
4	0,717	—0,220	—0,155
5	0,590	—0,404	—0,194
6	0,219	0,365	—0,099

Дальнейшая процедура факторизации состоит в вычислении второй репродуцированной матрицы, которая получается умножением столбца *модулей* зарядов второго фактора на его транспозицию (аналогично табл. 7.3.4). Затем вторая репродуцированная матрица вычитается из *преобразованной первой остаточной матрицы*, в результате получается вторая остаточная матрица, приведенная в табл. 7.3.7. Она преобразуется точно так же, как и первая остаточная матрица. Вычисляя по второй преобразованной остаточной матрице факторные заряды третьего фактора и применяя правило знаков, получим последний, третий столбец сокращенной факторной матрицы (табл. 7.3.8). Далее, снова умножая столбец модулей зарядов третьего фактора на его транспозицию, получаем третью репродуцированную корреляционную матрицу, вычитая которую из второй преобразованной остаточной матрицы, получаем третью остаточную матрицу, представленную в табл. 7.3.9.

Согласно уравнениям Терстона (7.3.7), исходная корреляционная матрица шести переменных позволяет извлечь только три значимых фактора. Прекращая на этом основании факторизацию в данном примере, отметим следующее. Согласно правилу двух стандартных отклонений, факторизацию следовало прекратить после извлечения второго фактора. Действительно, $2\sigma_r = 0,174$, как показано выше, а во второй остаточной корреляционной матрице нет ни одного элемента такой абсолютной величины. С другой стороны, следуя критерию Саундерса, нам следовало бы продолжить факторизацию, извлекая четвертый фактор.

Таблица 7.3.9

Третья остаточная корреляционная матрица

Переменные	1	2	3	4	5	6
1	0,051	—0,035	0,027	—0,041	0,004	—0,004
2	—0,035	0,041	0,001	0,004	0,032	—0,044
3	0,027	0,001	—0,025	0,005	—0,030	0,023
4	—0,041	0,004	0,005	0,030	0,002	0,000
5	0,004	0,032	—0,030	0,002	0,009	—0,017
6	—0,004	—0,044	0,023	0,000	—0,017	0,044
Суммы	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,002

Действительно, пользуясь третьей остаточной и факторной матрицами (табл. 7.3.8 и 7.3.7), вычисляем:

$$A = \frac{12}{5} \cdot 0{,}0168 = 2{,}4 \cdot 0{,}0168 \cong 0{,}04;$$

$$B = \left(\frac{6-3}{6}\right)^2 = 0{,}25;$$

$$C = \frac{1}{133}(6 - 2{,}96)^2 \cong \frac{9{,}242}{132} \cong 0{,}069;$$

$$B \cdot C = 0{,}25 \cdot 0{,}069 \cong 0{,}017 < A \cong 0{,}04,$$

т. е. допустимо продолжать факторизацию. Таким образом, уравнения Терстона на самом деле дают промежуточное значение числа шагов факторизации.

Закончив процесс факторизации, необходимо, умножив сокращенную факторную матрицу (табл. 7.3.8) на ее транспозицию, получить репродуцированную матрицу, сложить ее с последней (третьей) остаточной матрицей (табл. 7.3.9) и результат вычесть из исходной корреляционной матрицы (табл. 7.3.3). Таким путем определяется матрица погрешностей, элементы которой не должны превышать нескольких тысячных долей. Часто используют сокращенный метод проверки, которым мы воспользуемся после ротации.

Осуществим ортогональную ротацию системы соотнесения нашего примера, добиваясь выполнения требований «простой структуры».

Прежде всего определим проекции факторной структуры на три взаимно перпендикулярные плоскости, в которых лежат пары осей: F_1F_2; F_2F_3 и F_1F_3. При этом конец вектора каждой переменной будет изображен точкой: в плоскости F_1, F_2 — с координатами (a_{1j}, a_{2j}); в плоскости F_2, F_3 — с координатами (a_{2j}, a_{3j}); в плоскости F_1, F_3 — с координатами (a_{1j}, a_{3j}), где координаты

(a_{ij}, a_{kj}) — это пары зарядов i-того и k-того факторов из сокращенной факторной матрицы (табл. 7.3.8). Указанные проекции представлены на рис. 7.3.5. Рассматривая эти проекции, нельзя обнаружить ничего определенного в смысле требований «простой структуры» по Терстону. Но если повернуть систему осей F_1, F_2 на угол 45° против часовой стрелки (рис. 7.3.5, *а*), то можно видеть следующее.

Заряды первого фактора у переменных 2—5 сохраняются на высоком уровне, а заряды этого фактора у переменных 1 и 6

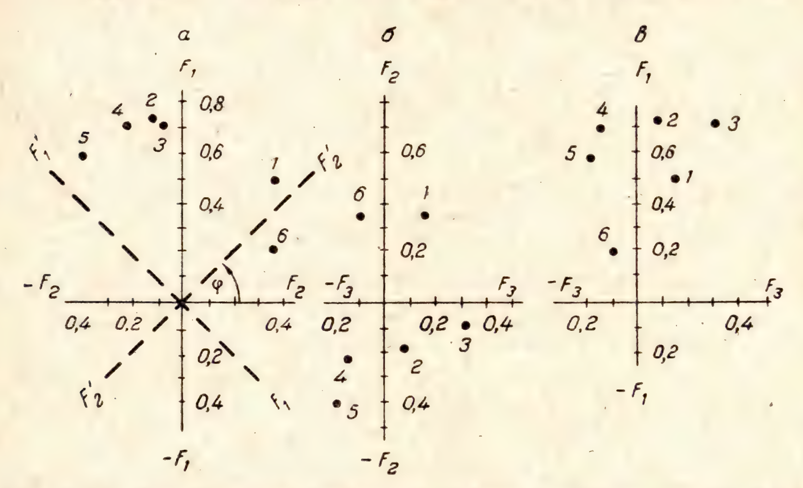


Рис. 7.3.5. Три проекции факторной структуры, согласно табл. 7.3.8.

а — для факторов F_1 и F_2; *б* — для F_2 и F_3; *в* — для F_1 и F_3. Точками обозначены проекции концов векторов соответствующих переменных. Пунктиром показано положение осей F_1 и F_2 после поворота на угол $\varphi = 45°$, удовлетворяющего (в первом приближении) требованиям «простой структуры».

приближаются к нулю. Заряды второго фактора становятся положительными и увеличиваются для всех переменных, кроме пятой, у которой заряд приближается к нулевому. Таким образом, требования «простой структуры» в определенной мере выполняются. Здесь необходимо подчеркнуть, что практически эти требования всегда выполняются только в приближенной степени. Возможно, что несколько лучший результат получился бы при повороте не на 45°, а на угол 30° 58′: тогда ось F_1' проходила бы почти через точку 5-й переменной, а ось F'_2 — через точку 6-й переменной, т. е. веса двух факторных зарядов стали бы нулевыми, а веса большинства других еще несколько увеличились. Однако невозможно «на глазок» определить «наилучший» угол, такой, чтобы требования «простой структуры» выполнялись бы в строго количественном смысле. Для этого необходим последовательный процесс вращений с поиском двух экстремумов на основе вычисления значений критериев «простой структуры», что даже в простейшем случае двух факторов является сложной зада-

чей, требующей значительного числа переборов.* Мы поэтому ограничимся приближением, которое достигается поворотом на 45°, достаточным для целей примера.

Теперь остается получить числовые значения факторных зарядов по первым двум факторам после ротации (очевидно, что заряды третьего фактора не изменятся, так как система осей F_1 и F_2 вращалась вокруг неподвижной оси F_3). Воспользуемся аналитическим методом, для чего определим матрицу поворота системы осей F_1 и F_2.

Матрица нулевого поворота в нашем примере имеет порядок 3:

$\lambda_0 =$

	F_1	F_2	F_3
F_1	1	0	0
F_2	0	1	0
F_3	0	0	1

Удаляя из матрицы λ_0 столбец и строку F_3 (эта ось не вращается), получаем подматрицу

$$\lambda_0^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

умножая которую на матрицу поворота осей λ (7.3.9) и добавляя обратно строку и столбец F_3, получаем матрицу первого поворота осей F_1 и F_2, с элементами $\sin 45° = \cos 45° = 0{,}71$:

$$\lambda_0^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 0{,}71 & 0{,}71 & 0 \\ -0{,}71 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить значения факторных зарядов после первой ротации (поворота), умножаем сокращенную факторную матрицу «не вращавшихся» факторов (табл. 7.3.8, обозначим ее V_0) на матрицу первого поворота $\lambda_1^{(1,2)}$:

$$V_1 = V_0\lambda_1^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 0{,}500 & 0{,}365 & 0{,}145 \\ 0{,}733 & -0{,}118 & 0{,}075 \\ 0{,}726 & -0{,}095 & 0{,}312 \\ 0{,}717 & -0{,}220 & -0{,}155 \\ 0{,}590 & -0{,}404 & -0{,}194 \\ 0{,}219 & 0{,}365 & -0{,}099 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0{,}71 & 0{,}71 & 0 \\ -0{,}71 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0{,}096 & 0{,}614 & 0{,}145 \\ 0{,}604 & 0{,}436 & 0{,}075 \\ 0{,}582 & 0{,}448 & 0{,}312 \\ 0{,}655 & 0{,}353 & -0{,}155 \\ 0{,}705 & 0{,}132 & -0{,}194 \\ -0{,}104 & 0{,}414 & -0{,}099 \end{vmatrix},$$

* Эту задачу успешно могут решить ЭВМ.

где V_1 — сокращенная факторная матрица после первой ротации, в которой столбцы (слева направо) соответствуют факторам $F_1 \div F_3$, а строки (сверху вниз) — переменным 1—6. Проекции факторной структуры, соответствующей матрице V_1, приведены на рис. 7.3.6 (они получены тем же путем, что и проекции на рис. 7.3.5).

Система из трех факторов позволяет выполнить еще одну ротацию, благодаря которой «простая структура» может быть улучшена. Рассматривая рис. 7.3.6, *б*, можно видеть, что повернув

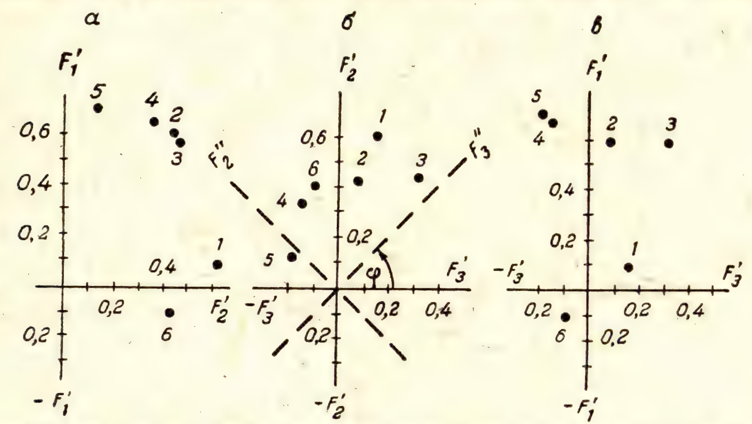


Рис. 7.3.6. Три проекции факторной структуры после первой ротации (согласно матрице V_1).

а — для факторов F_1' и F_2'; *б* — для факторов F_2' и F_3'; *в* — для факторов F_1' и F_3'. Точки — проекции концов векторов соответствующих переменных. Пунктиром показано новое положение осей F_2' и F_3' после поворота на угол $\varphi = 45°$, в первом приближении удовлетворяющего требованиям «простой структуры».

систему осей F_2' и F_3' так, чтобы они проходили через точки 5 и 3, мы получили бы два нулевых факторных заряда, а остальные — максимально большие и положительные. Для этого нужен поворот на угол $\varphi \cong 54° 30'$. Мы, однако, для упрощения вычислений в примере осуществим поворот снова на 45°, как показано на рис. 7.3.6, *б*; этого достаточно в первом приближении «к простой структуре».

Необходимо определить матрицу второго поворота осей F_2 и F_3. Для этого из матрицы λ_0 удаляем строку и столбец оси F_1, которая не вращается, и получаем подматрицу:

$$\lambda_0^{(2,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножая ее на λ (7.3.9) и добавляя удаленную строку и столбец F_1, получаем матрицу второго поворота, элементы которой $\sin 45° = \cos 45° = 0{,}71$:

$$\lambda_2^{(2,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0 & -0{,}71 & 0{,}71 \end{vmatrix}.$$

Теперь можно получить значения факторных зарядов после второй ротации двумя путями: либо умножая $V_1 \cdot \lambda_2^{(2,3)}$, либо умножая $V_0(\lambda_1^{(1,2)} \cdot \lambda_2^{(2,3)})$. Второй путь приводит к меньшим ошибкам, поэтому определим матрицу совместного поворота осей 1, 2 и 2, 3:

$$\lambda_{(1 \wedge 2)}^{(1,2 \wedge 2,3)} = \lambda_1^{(1,2)} \cdot \lambda_2^{(2,3)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0{,}71 & 0{,}71 & 0 \\ -0{,}71 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0 & -0{,}71 & 0{,}71 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0{,}71 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ -0{,}71 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0 & -0{,}71 & 0{,}71 \end{vmatrix},$$

а затем умножим на нее исходную сокращенную факторную матрицу

$$V_2 = V_0 \cdot \lambda_{(1 \wedge 2)}^{(1,2 \wedge 2,3)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0{,}500 & 0{,}365 & 0{,}145 \\ 0{,}733 & -0{,}118 & 0{,}075 \\ 0{,}726 & -0{,}095 & 0{,}312 \\ 0{,}717 & -0{,}220 & -0{,}155 \\ 0{,}590 & -0{,}404 & -0{,}194 \\ 0{,}219 & 0{,}365 & -0{,}099 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0{,}71 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ -0{,}71 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0 & -0{,}71 & 0{,}71 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0{,}096 & 0{,}329 & 0{,}535 \\ 0{,}604 & 0{,}254 & 0{,}360 \\ 0{,}582 & 0{,}095 & 0{,}537 \\ 0{,}655 & 0{,}358 & 0{,}138 \\ 0{,}705 & 0{,}230 & -0{,}044 \\ -0{,}104 & 0{,}361 & 0{,}221 \end{vmatrix},$$

где V_2 — сокращенная факторная матрица после двух ротаций (переменные — по строкам, сверху вниз, факторы — по столбцам, слева направо).

Геометрическая интерпретация факторной структуры, согласно матрице V_2, представлена на рис. 7.3.7. Можно видеть, что требования «простой структуры» приблизительно выполняются.

Теперь остается проверить результаты вращения. Проверка выполняется следующим образом. Во-первых, необходимо вычислить запасы общей изменчивости по матрице V_2 и сравнить их

j	h_j^2 вычисленные по V_2	h_j^2 вычисленные по V_0	Расхождения
1	0,403	0,404	0,001
2	0,557	0,556	0,001
3	0,635	0,633	0,002
4	0,589	0,586	0,003
5	0,552	0,548	0,004
6	0,188	0,189	0,001

с полученными по матрице V_0. Это сделано в табл. 7.3.10. Можно видеть, что расхождения незначительны, следовательно, процесс ротации искажений не внес. Во-вторых, необходимо по уравнению

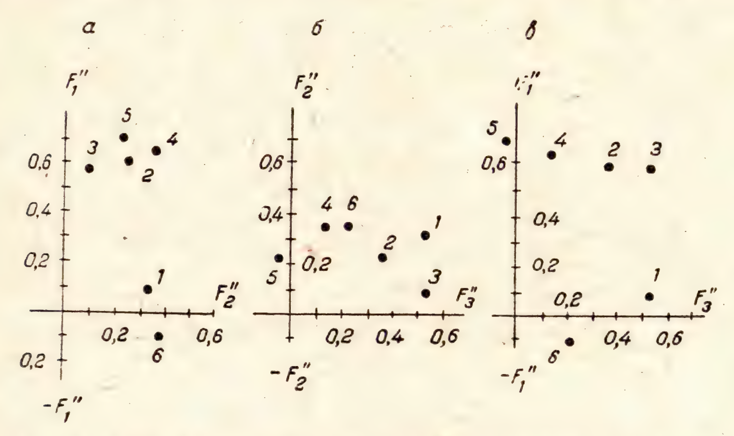


Рис. 7.3.7. Три проекции факторной структуры после двух ротаций (согласно матрице V_2).

а — для факторов F_1'' и F_2''; *б* — для факторов F_2'' и F_3''; *в* — для факторов F_1'' и F_3''. Точки — проекции концов векторов переменных.

(7.1.7) вычислить по матрице V_2 репродуцированные коэффициенты корреляции и прибавить к ним соответствующие элементы из третьей остаточной матрицы (табл. 7.3.9), а затем сравнить с исходными коэффициентами корреляции (табл. 7.3.3). При сокращенном методе проверки, как указывалось, вычисляют не все коэффициенты, а только выборочно — m пар, как показано в табл. 7.3.11.

Так как при факторизации векторы некоторых переменных были подвергнуты обращениям, то это необходимо учесть при суммировании остатков $\overline{r}_{ij}$. Здесь используется следующее пра-

Таблица 7.3.11

Выборочная проверка исходных коэффициентов корреляции на основе матрицы факторов V_2

Пары переменных ij	$\overset{*}{r}_{ij}$	$\bar{r}_{ij}$ в третьей остаточной матрице	Сумма обращений переменных i и j	Новый знак $\bar{r}_{ij}$	$\overset{*}{r}_{ij}+\bar{r}_{ij}$	Исходный r_{ij}	Расхождение
1 и 2	0,334	—0,034	Четная (2)	—	0,300	0,299	0,001
2 и 3	0,569	0,001	Четная (4)	+	0,570	0,568	0,002
3 и 4	0,495	0,005	Нечетная (3)	—	0,490	0,487	0,003
4 и 5	0,545	0,002	Четная (2)	+	0,547	0,545	0,002
5 и 6	0,000	—0,017	Четная (2)	—	—0,017	—0,016	0,001
1 и 6	0,227	—0,004	Нечетная (1)	+	0,231	0,232	0,001

вило: если сумма обращений i-той и j-той переменных *четная*, то знак остатка из третьей остаточной матрицы не изменяется; если сумма обращений переменных *нечетная*, то знак остатка изменяется на противоположный (см. табл. 7.3.11).

Вычислительная процедура мультифакторного анализа заканчивается проверкой. Далее необходима содержательная интерпретация выявленной латентной структуры, которая (как неоднократно указывалось) выходит за рамки математической статистики.*

---

* Примеры интерпретации факторной структуры можно найти в работах: Б. М. Теплов. Простейшие способы факторного анализа. В сб.: Типологические особенности высшей нервной деятельности человека, т. V. «Просвещение», М., 1967; В. Д. Небылицын. Современное состояние факториального анализа. «Вопросы психологии», 1960, № 4; Б. З. Доктор ов. Сравнение рабочих характеристик различных методов факторного анализа при комплексном изучении человека. В сб.: Человек и общество, вып. IV, Изд. ЛГУ, Л., 1969.

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ И ДЕЙСТВИЯХ С НИМИ

Матрицей называется прямоугольная ($m \times n$) таблица чисел (или других символов), размещенных в m строках и n столбцах. Полностью матрица записывается так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

где a_{ij} при $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$ — *элемент* матрицы A, лежащий на пересечении i-той строки и j-того столбца. Сокращенная запись: $A = \| a_{ij} \|$.

Матрица с одинаковым количеством строк и столбцов называется *квадратной*; тогда говорят о *порядке* матрицы. Матрица $n \times n$ есть *матрица порядка n*. Элементы a_{ii} (например, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) в квадратной матрице образуют ее *главную диагональ* и называются *диагональными*; остальные элементы a_{ij} при $i \neq j$ — *недиагональные*. Матрица, для которой все недиагональные элементы равны нулю, а диагональные отличны от нуля, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы суть единицы, называется *единичной*.

Транспозицией матрицы A называется матрица A′ (*транспонированная* матрица), у которой столбцы — это строки исходной матрицы A. Например:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

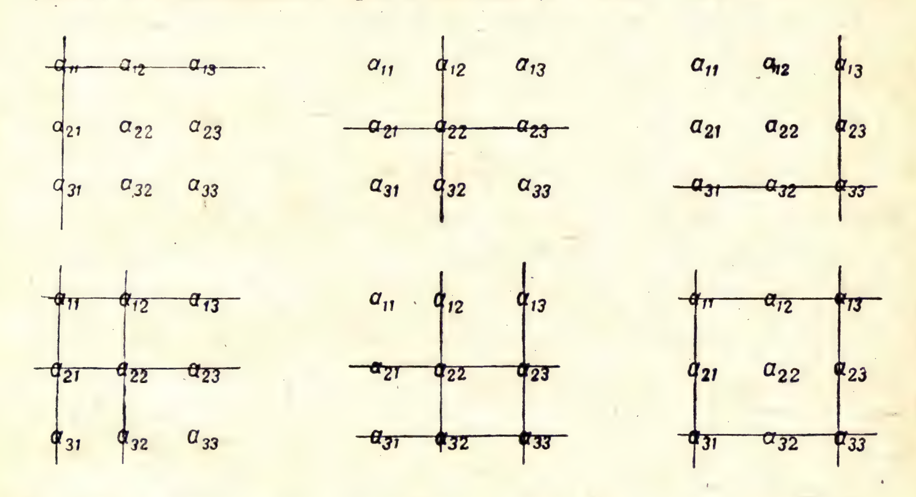
Можно видеть, что транспонирование квадратной матрицы достигается поворотом исходной матрицы на 180° вокруг главной диагонали. Аналогичный поворот прямоугольной матрицы производится вокруг оси, проводимой мысленно через элементы a_{11} и a_{mn}.

О двух матрицах A и B говорят, что они *равны* (A = B), если они имеют одинаковое число строк и столбцов и если все $a_{ij} = b_{ij}$. Квадратная матрица называется *симметричной*, если она равна своей транспозиции: A = A′. Заметим, что в симметричной матрице элементы, равноудаленные вниз и вверх (по перпендикуляру) от главной диагонали, попарно равны: $a_{ij} = a_{ji}$. Например:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу можно расчленить на части; особое значение имеют векторы, подматрицы и скаляры. *Вектором* называется величина, имеющая направление. Векторы, расположенные перпендикулярно друг другу, называются независимыми (ортогональными).* Заметим, что строки и столбцы прямоугольной (квадратной) матрицы удовлетворяют понятию ортогональных векторов; поэтому говорят о *векторе-строке* и *векторе-столбце*. Заметим также, что вектор-строка является матрицей $(1 \times n)$, в которой всего одна строка и n столбцов. Аналогично, вектор-столбец — это матрица $(m \times 1)$, в которой m строк, но один столбец.

Будем называть *одноименными* i-тую строку и i-тый столбец, которые при транспонировании заменяют друг друга. ** Тогда, удаляя одноименные столбцы и строки из матрицы, получаем *подматрицы*. В частности, из квадратной матрицы порядка N можно получать подматрицы разного порядка, удаляя по k одноименных строк и столбцов ($k = 1, 2, \ldots, N - 1$):



Заметим, что «минимальная» подматрица порядка 1 — это отдельный и диагональный элемент квадратной матрицы (a_{ii}). Матрица (1×1), состоящая всего из одного элемента, называется *скаляром*.***

Подматрицу B матрицы A, полученную удалением одноименных столбцов и строк, можно записать, заменяя удаленные элементы нулями; соответственно, удаленную часть B матрицы A можно записать, заменяя нулями элементы подматрицы B:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{A}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{B}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\text{B}}}$$

---

* Любой вектор может быть нормирован, т. е. преобразован в величину, принимающую значения от 0 до 1, и тогда называется *ортом*.

** Действительно, транспонируя вектор-столбец, получаем вектор-строку, и наоборот.

*** Вообще любой элемент a_{ij} матрицы A можно рассматривать как скаляр, но получаемый другим путем (умножением вектора-строки на вектор-столбец, см. ниже).

Поскольку удаленная часть $\overline{B}$ дополняет подматрицу B до целой матрицы A, часть $\overline{B}$ можно назвать *дополнением* матрицы B до матрицы A. При определенных условиях любую матрицу можно рассматривать как подматрицу B некоторой целой матрицы A более высокого порядка и дополнять одноименными строками и столбцами, элементы которых, в частности, могут быть только нулями.

Рассмотрим *сложение* матриц. Здесь выделяются: сложение матрицы и скаляра (числа), сложение двух (и более) матриц, объединение матриц. Суммировать матрицу и число означает увеличить все элементы матрицы на это число:

$$A+b=\begin{bmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b \end{bmatrix}; \quad A-b=\begin{bmatrix} a_{11}-b & a_{12}-b \\ a_{21}-b & a_{22}-b \end{bmatrix}.$$

Суммировать матрицы с одинаковым числом строк и столбцов — это значит суммировать (алгебраически) все одноименные элементы:

$$A+B-C=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}-c_{11} & a_{12}+b_{12}-c_{12} & a_{13}+b_{13}-c_{13} \\ a_{21}+b_{21}-c_{21} & a_{22}+b_{22}-c_{22} & a_{23}+b_{23}-c_{23} \end{bmatrix}.$$

Объединение матриц это специальный вид сложения, при котором матрицы — слагаемые относятся к одному и тому же явлению. Тогда в частном случае слагаемые рассматриваются как подматрица и ее дополнение: $A = B + \overline{B}$, а в более общем (если имеется частичное пересечение элементов) — как разные подматрицы и их дополнения, получаемые из одной и той же неизвестной матрицы в разных испытаниях.

Пусть, например, изучаемому явлению могут быть присущи свойства 1, 2, 3 и 4, но в одном испытании для него получена матрица A_1, характеризующая свойства 1, 2, 3, а в другом испытании — матрица A_2, характеризующая только свойства 2, 3, 4. Тогда, рассматривая матрицы A_1 и A_2 как подматрицы целой матрицы A и учитывая дополнения A_1 и A_2 получаем: $A = A_1 \cup A_2 = (A_1 + \overline{A}_1) + (\overline{A}_2 + A_2)$, например:

$$A=\underbrace{\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}\!\!\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \cup \underbrace{\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{matrix}\!\!\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\!\!\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1+\overline{A}_1} + \underbrace{\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\!\!\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\overline{A}_2+A_2}.$$

Заметим, что объединение матриц по содержанию представляет собой способ накопления информации, получаемой в частных исследованиях.

Рассмотрим *умножение* матриц. Простейшим является умножение матрицы на число, при этом каждый элемент матрицы умножается на число. Умножение векторов и матриц в общем случае некоммутативно: $AB \neq BA$. Поэтому здесь различают умножение *слева* и *справа*. Кроме того, умножение векторов и матриц оказывается возможным лишь при следующем условии: число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго. Это условие аккумулируется формулой $(m \times n)\cdot(n \times p) = (m \times p)$, где m — число строк первого сомножителя и произведения; n — число столбцов первого и число строк второго сомножителя; p — число столбцов второго сомножителя и произведения. Умножение матриц сводится к $(m \times p)$-кратному умножению i-той строки ($i = 1, 2, \ldots, m$) первого сомножителя на j-тый столбец ($j = 1, 2, \ldots, p$) второго сомножителя. Поэтому рассмотрим сначала умножение двух векторов.

Скалярным произведением является результат умножения вектора строки на вектор-столбец, которое выполняется по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj},$$

где a_{ir} и b_{rj} — элементы вектора-строки и вектора-столбца соответственно. Например:

$$C = AB = [2 \quad 4 \; -1 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = [2(-1) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 4] = 20.$$

Заметим, что при скалярном произведении всегда $(1 \times n) \cdot (n \times 1) = 1$.

При *матричном произведении* каждый элемент матрицы C = AB получается как скалярное произведение. Например, при умножении слева:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3) & (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2) \\ (2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 3) & (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \\ (0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (0 \cdot 1 + 1 \cdot 3) & (0 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{C},$$

но при умножении справа:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0) & (2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1) \\ (1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0) & (1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}}_{C}.$$

Существенный интерес для факторного анализа представляет умножение вектора-столбца $(m \times 1)$ на его транспозицию — вектор-строку $(1 \times m)$, в результате чего получается симметричная матрица порядка m:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot [a_{11} \quad a_{12} \; \ldots \; a_{1m}] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{11} & a_{11}a_{12} & \ldots & a_{11}a_{1m} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}a_{12} & \ldots & a_{21}a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}a_{11} & a_{m1}a_{12} & \ldots & a_{m1}a_{1m} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что симметричная матрица порядка m всегда получается при умножении матрицы с m строками на ее транспозицию.

В заключение следует указать, что умножение матриц ассоциативно: $ABC = (AB) \cdot C = A(BC)$, и справедливо обычное возведение в степень: $A^k = A^{k-1} \cdot A$ при натуральном $k \geqslant 1$, причем $A^1 \equiv A$.

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица I

Значение функции распределения $F(x)$ плотности $f(x)$ нормального закона

x	$F(x)$	$f(x)$	x	$F(x)$	$f(x)$
0,0	0,50000	0,39894	2,0	0,97725	0,05399
1	53983	39695	1	98214	04398
2	57926	39104	2	98610	03547
3	61791	38139	3	98928	02833
4	65542	36827	4	99180	02239
0,5	0,69146	0,35207	2,5	0,99379	0,01753
6	72575	33322	6	99534	01358
7	75804	31225	7	99653	01042
8	78814	28969	8	99744	00792
9	81594	26609	9	99813	00595
1,0	0,84134	0,24197	3,0	0,99865	0,00443
1	86433	21785	1	99903	00327
2	88493	19419	2	99931	00238
3	90320	17137	3	99952	00172
4	91924	14973	4	99966	00123
1,5	0,93319	0,12952	3,5	0,99977	0,00087
6	94520	11092	6	99984	00061
7	95543	09405	7	99989	00042
8	96407	07895	8	99993	00029
9	97128	06562	9	99995	00020

Таблица II

Гамма-функция (По И. Н. Бронштейну и К. А. Семендяеву, 1965)

Значения гамма-функции для $x<1$ и для $x>2$ вычисляются по формулам $\Gamma(x)=\Gamma(x+1):x$; $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$. Например: $\Gamma(0,7)=\Gamma(1,7):0,7=0,90864:0,7=1,2981$; $\Gamma(3,5)=2,5\cdot\Gamma(2,5)=2,5\cdot1,5\Gamma(1,5)=2,5\cdot1,5\cdot0,88\,623=3,32336$.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184

x	Г (*x*)	*x*	Г (*x*)	*x*	Г (*x*)	*x*	Г (*x*)
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

Таблица III

Значения *z*-преобразования Фишера для r_{ij} (по А. К. Митропольскому, 1961)

r_{ij}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0501	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
1	0,1003	0,1105	0,1206	0,1308	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
3	0,3095	0,3206	0,3317	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6467

Таблица IV

Значения r_{ij} для *z*-преобразования Фишера (по А. К. Митропольскому, 1961)

Нуль целых опущен

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898
1	0997	1096	1194	1293	1391	1489	1586	1684	1781	1877
2	1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821
3	2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714
4	3800	3885	3969	4053	4136	4219	4301	4382	4462	4542
5	4621	4699	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299
6	5370	5441	5511	5580	5649	5717	5784	5850	5915	5980
7	6044	6107	6169	6231	6291	6351	6411	6469	6527	6584
8	6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114
9	7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969
1	8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306
2	8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591
3	8617	8643	8668	8692	8717	8741	8764	8787	8810	8832
4	8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033
5	9051	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9201
6	9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9341
7	9354	9366	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458
8	9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554
9	9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9618	9626	9633
2,0	9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9686	9693	9699
1	9704	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753
2	9759	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797
3	9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834
4	9837	9840	9843	9846	9849	9852	9855	9858	9861	9864
5	9866	9869	9871	9874	9876	9879	9881	9884	9886	9888
6	9890	9892	9894	9897	9899	9901	9903	9904	9906	9908
7	9910	9912	9914	9915	9917	9919	9920	9922	9923	9925
8	9926	9928	9929	9931	9932	9933	9935	9936	9937	9938
9	9940	9941	9942	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949

Таблица V

Критические значения выборочного коэффициента линейной корреляции r_α (по В. Ю. Урбаху, 1964)

r незначим при $r \leqslant r_{\alpha=0,05}$ и значим при $r > r_{\alpha=0,01}$.

n	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	n	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$
4	0,950	0,990	26	0,388	0,496
5	0,878	0,959	27	0,381	0,487
6	0,811	9,917	28	0,374	0,478
7	0,754	0,874	29	0,367	0,470
8	0,707	0,834	30	0,361	0,463
9	0,666	0,798	35	0,332	0,435
10	0,632	0,765	40	0,310	0,407
11	0,602	0,735	45	0,292	0,384
12	0,576	0,708	50	0,277	0,364
13	0,553	0,684	60	0,253	0,333
14	0,532	0,661	70	0,234	0,308
15	0,514	0,641	80	0,219	0,288
16	0,497	0,623	90	0,206	0,272
17	0,482	0,606	100	0,196	0,258
18	0,468	0,590	125	0,175	0,230
19	0,456	0,575	150	0,160	0,210
20	0,444	0,561	200	0,138	0,182
21	0,433	0,549	250	0,124	0,163
22	0,423	0,537	300	0,113	0,148
23	0,413	0,526	400	0,098	0,128
24	0,404	0,515	500	0,088	0,115
25	0,396	0,505	1000	0,062	0,081

Таблица VI

Критические значения выборочного коэффициента корреляции рангов (по В. Ю. Урбаху, 1964)

ρ незначим при $\rho \leqslant \rho_{\alpha=0,05}$ и значим при $\rho > \rho_{\alpha=0,01}$.

n	5%	1%	n	5%	1%	n	5%	1%
5	0,94	—	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	—	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,40	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

Таблица VII

Квантили χ^2-распределения для доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}95$ и 0,99

Нулевая гипотеза о сходстве принимается при $\chi^2 \leqslant \chi_{\alpha=0,05}$ и отклоняется при $\chi^2 > \chi_{\alpha=0,01}$.

ν	0,95	0,99	ν	0,95	0,99	ν	0,95	0,99
1	3,84	6,64	31	45,0	52,2	72	92,8	103
2	5,99	9,21	32	46,2	53,5	74	95,1	105
3	7,82	11,3	33	47,4	54,8	76	97,4	108
4	9,49	13,3	34	48,6	56,1	78	99,6	110
5	11,1	15,1	35	49,8	57,3	80	102	112
6	12,6	16,8	36	51,0	58,6	82	104	115
7	14,1	18,5	37	52,2	59,9	84	106	117
8	15,5	20,1	38	53,4	61,2	86	109	119
9	16,9	21,7	39	54,6	62,4	88	111	122
10	18,3	23,2	40	55,8	63,7	90	113	124
11	19,7	24,7	41	56,9	65,0	92	115	126
12	21,0	26,2	42	58,1	66,2	94	118	129
13	22,4	27,7	43	59,3	67,5	96	120	131
14	23,7	29,1	44	60,5	68,7	98	122	133
15	25,0	30,6	45	61,7	70,0	100	124	136
16	26,3	32,0	46	62,8	71,2	110	135	147
17	27,6	33,4	47	64,0	72,4	120	147	159
18	28,9	34,8	48	65,2	73,7	130	158	170
19	30,1	36,2	49	66,3	74,9	140	169	182
20	31,4	37,6	50	67,5	76,2	150	180	193
21	32,7	38,9	52	69,8	78,6	200	234	249
22	33,9	40,3	54	72,2	81,1	250	288	305

ν	0,95	0,99	ν	0,95	0,99	ν	0,95	0,99
23	35,2	41,6	56	74,5	83,5	300	341	360
24	36,4	43,0	58	76,8	86,0	400	448	469
25	37,6	44,3	60	79,1	88,4	500	553	576
26	38,9	45,6	62	81,4	90,8	600	658	683
27	40,1	47,0	64	83,7	93,2	700	763	790
28	41,3	48,3	66	86,0	95,6	800	867	896
29	42,6	49,6	68	88,2	98,0	900	971	1002
30	43,8	50,9	70	90,5	100	1000	1075	1107

Таблица VIII

Квантили t-распределения Стьюдента для доверительной вероятности $1-\alpha=0,95$; 0,99 и 0,999

Нулевая гипотеза о сходстве принимается при $t \leqslant t_{\alpha=0,05}$ и отклоняется при $t > t_{\alpha=0,01}$.

ν	0,95	0,99	0,999	ν	0,95	0,99	0,999
1	12,706	63,657	636,619	35	2,030	2,724	3,591
2	4,303	9,925	31,599	40	2,021	2,704	3,551
3	3,182	5,841	12,924	45	2 014	2,690	3,520
4	2,776	4,604	8,610	50	2,009	2,678	3,496
5	2,571	4,032	6,869	55	2,004	2,668	3,476
6	2,447	3,707	5,959	60	2,000	2,660	3,460
7	2,365	3,450	5,408	65	1,997	2,654	3,447
8	2,306	3,355	5,041	70	1,994	2,648	3,435
9	2,262	3,250	4,781	75	1,992	2,643	3,426
10	2,228	3,169	4,587	80	1,990	2,639	3,416
11	2,201	3,106	4,437	85	1,988	2,635	3,412
12	2,179	3,054	4,318	90	1,987	2,632	3,402
13	2,160	3,012	4,221	95	1,985	2,629	3,396
14	2,145	2,977	4,140	100	1,984	2,626	3,390
15	2,131	2,947	4,073	105	1,983	2,623	3,386
16	2,120	2,921	4,015	110	1,982	2,621	3,382
17	2,110	2,898	3,965	120	1,980	2,617	3,374
18	2,101	2,878	3,922	130	1,978	2,614	3,366
19	2,093	2,861	3,883	140	1,977	2,611	3,361
20	2,086	2,845	3,850	150	1,976	2,609	3,357
21	2,080	2,831	3,819	200	1,972	2,601	3,340
22	2,074	2,819	3,792	300	1,968	2,592	3,323
23	2,069	2,807	3,768	400	1,966	2,588	3,315
24	2,064	2,797	3,745	500	1,965	2,586	3,310
25	2,060	2,787	3,725	600	1,964	2,584	3,306
26	2,056	2,779	3,707	700	1,9634	2,5829	3,304
27	2,052	2,771	3,690	800	1,9629	2,5820	3,302
28	2,048	2,763	3,674	900	1,9626	2,5813	3,301
29	2,045	2,756	3,659	1000	1,9623	2,5808	3,300
30	2,042	2,750	3,646	∞	1,9600	2,5758	3,291

Квантили F-распределения для доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}95$ (по А. К. Митропольскому, 1961)

Нулевая гипотеза о сходстве принимается при $F \leqslant F_{\alpha=0,05}$; ν_1 — число степеней свободы числителя; ν_2 — знаменателя.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44

Продолжение табл. IXа

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Таблица IXб

Квантили F-распределения для доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}99$ (по А. К. Митропольскому, 1961)

Нулевая гипотеза о сходстве отклоняется при $F > F_{\alpha=0,01}$; ν_1 — для числителя, ν_2 — для знаменателя.

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6169	6234	6302	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,46	99,48	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,83	26,60	26,35	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,93	13,69	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,68	9,47	9,24	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	7,31	7,09	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,27	6,07	5,85	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,28	5,06	4,86

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,92	4,73	4,51	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,33	4,12	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,21	4,02	3,80	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,78	3,56	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,78	3,59	3,37	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,43	3,21	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,48	3,29	3,07	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,18	2,96	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,08	2,86	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,20	3,00	2,79	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,12	2,92	2,70	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,86	2,63	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,99	2,80	2,58	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,75	2,53	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,89	2,70	2,48	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,85	2,66	2,44	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,81	2,62	2,40	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,78	2,58	2,36	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,74	2,55	2,33	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,71	2,52	2,30	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,68	2,49	2,27	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,66	2,47	2,24	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,56	2,37	2,13	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,48	2,29	2,05	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,43	2,23	1,99	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,38	2,18	1,94	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,32	2,12	1,87	1,60
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,78	2,45	2,28	2,07	1,82	1,53
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,42	2,24	2,03	1,78	1,49
90	6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,72	2,39	2,21	2,00	1,75	1,45
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,37	2,19	1,98	1,73	1,43
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,66	2,33	2,15	1,94	1,69	1,37
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,63	2,31	2,13	1,92	1,66	1,33
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,60	2,28	2,09	1,88	1,62	1,28
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,57	2,24	2,06	1,85	1,59	1,22
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,56	2,23	2,04	1,84	1,57	1,19
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,55	2,22	2,03	1,83	1,56	1,16
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,53	2,20	2,01	1,81	1,54	1,11
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,79	1,52	1,00

Квантили G-распределения Кохрана для доверительных вероятностей $1-\alpha=0{,}95$ (напечатаны обычным шрифтом) и $1-\alpha=0{,}99$ (напечатаны жирным шрифтом) (по В. Ю. Урбаху, 1964)

Ноль целых и запятая опущены. Нулевая гипотеза о сходстве принимается при $G \leqslant G_{\alpha=0,05}$ и отклоняется при $G > G_{\alpha=0,01}$; m—число сравниваемых дисперсий; ν—число степеней свободы.

ν \ m	3	4	5	6	7	8	9	10
1	967	906	841	781	727	680	638	602
	993	**968**	**928**	**883**	**838**	**794**	**754**	**718**
2	871	768	684	616	561	516	478	445
	942	**864**	**788**	**722**	**664**	**615**	**573**	**534**
3	798	684	598	532	480	438	403	373
	883	**781**	**696**	**626**	**568**	**521**	**481**	**447**
4	746	629	544	480	431	391	358	331
	834	**721**	**633**	**564**	**508**	**463**	**425**	**393**
5	707	590	506	445	397	360	329	303
	793	**676**	**588**	**520**	**466**	**423**	**387**	**357**
6	677	560	478	418	373	336	307	282
	761	**641**	**553**	**487**	**435**	**393**	**359**	**331**
7	653	536	456	398	354	318	290	267
	734	**613**	**526**	**461**	**410**	**370**	**338**	**311**
8	633	518	439	382	338	304	277	254
	711	**590**	**504**	**440**	**391**	**352**	**321**	**294**
9	617	502	424	368	326	293	266	244
	691	**570**	**485**	**423**	**375**	**337**	**307**	**281**
10	602	488	412	357	315	283	257	235
	674	**551**	**470**	**408**	**362**	**325**	**295**	**270**
12	580	466	392	339	298	267	244	224
	647	**527**	**445**	**384**	**340**	**305**	**277**	**254**
14	560	450	377	325	285	256	232	213
	625	**503**	**425**	**368**	**322**	**290**	**263**	**240**
16	547	437	364	313	277	246	223	203
	606	**488**	**409**	**353**	**310**	**278**	**251**	**230**
18	536	425	353	305	267	239	217	199
	590	**474**	**397**	**340**	**298**	**269**	**243**	**221**
20	526	416	335	298	259	230	210	191
	577	**461**	**845**	**330**	**289**	**260**	**235**	**215**
25	504	397	329	282	245	219	198	180
	550	**438**	**363**	**312**	**270**	**243**	**219**	**200**
30	490	383	315	270	233	209	190	173
	533	**420**	**349**	**299**	**259**	**230**	**209**	**190**
35	479	372	306	262	227	201	183	216
	518	**408**	**337**	**288**	**250**	**222**	**200**	**182**
40	469	364	298	255	220	195	177	162
	505	**397**	**327**	**280**	**242**	**215**	**192**	**177**
45	460	357	291	250	215	190	173	157
	496	**387**	**319**	**272**	**235**	**209**	**288**	**172**
50	455	350	288	246	210	186	170	152
	488	**380**	**312**	**266**	**230**	**204**	**184**	**167**
60	444	341	279	239	204	179	161	148
	474	**368**	**300**	**256**	**220**	**198**	**177**	**160**
80	429	329	268	227	195	170	154	140
	455	**350**	**285**	**243**	**210**	**186**	**164**	**150**

m / ν	3	4	5	6	7	8	9	10
100	417	319	261	220	189	165	159	136
	441	**338**	**277**	**235**	**202**	**180**	**160**	**143**
150	401	305	250	211	180	160	145	130
	421	**322**	**263**	**220**	**194**	**170**	**150**	**137**
200	390	299	246	210	180	158	142	130
	410	**310**	**255**	**215**	**190**	**165**	**148**	**135**

Таблица XI

Допустимые уровни расслоения корреляционной матрицы при доверительной вероятности 0,99

n — число наблюдений; $r(0)$ значение нулевой «секущей» плоскости — минимальная значимая абсолютная величина коэффициента корреляции; $|\Delta r|$ — допустимый «шаг» расслоения; s — допустимое число уровней расслоения; $r(1)$, $r(2)$, . . ., $r(9)$ — абсолютные значения секущих плоскостей.

n	$r(0)$	$\|\Delta r\|$	s	$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$	$r(4)$	$r(5)$	$r(6)$	$r(7)$	$r(8)$	$r(9)$
40	0,407	0,558	1	0,965	—	—	—	—	—	—	—	—
50	0,364	0,500	1	0,864	—	—	—	—	—	—	—	—
60	0,333	0,462	1	0,795	—	—	—	—	—	—	—	—
80	0,288	0,401	1	0,689	—	—	—	—	—	—	—	—
100	0,258	0,363	2	0,621	0,984	—	—	—	—	—	—	—
120	0,236	0,328	2	0,564	0,892	—	—	—	—	—	—	—
150	0,210	0,296	2	0,505	0,802	—	—	—	—	—	—	—
200	0,182	0,254	3	0,436	0,690	0,944	—	—	—	—	—	—
300	0,148	0,207	4	0,355	0,562	0,769	0,976	—	—	—	—	—
400	0,128	0,182	4	0,310	0,492	0,674	0,856	—	—	—	—	—
500	0,115	0,162	5	0,277	0,439	0,601	0,763	0,925	—	—	—	—
600	0,106	0,150	5	0,256	0,406	0,556	0,706	0,856	—	—	—	—
700	0,098	0,139	6	0,237	0,376	0,515	0,654	0,793	0,932	—	—	—
800	0,091	0,129	7	0,220	0,349	0,478	0,607	0,736	0,865	0,994	—	—
900	0,086	0,122	7	0,208	0,330	0,452	0,574	0,696	0,818	0,940	—	—
1000	0,081	0,116	7	0,197	0,313	0,429	0,545	0,661	0,777	0,893	—	—
1333	0,070	0,100	9	0,170	0,270	0,370	0,470	0,570	0,670	0,770	0,870	0,970

ЛИТЕРАТУРА

Абергауз Г. Г., А. П. Тронь, Ю. Н. Копенкин, И. А. Коровина. Справочник по вероятностным расчетам. ВИ МО СССР, М., 1970.

Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. ГИФ-МЛ, М., 1963.

Артемьева Е. Ю. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. Изд. МГУ, М., 1969.

Башаринов А. Е., Б. С. Флейшман. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. «Советское радио», М., 1962.

Беккенбах Э. (ред.). Прикладная комбинаторная математика. «Мир», М., 1968.

Белинский В. А., И. Л. Калихман, Л. Е. Майстров, А. М. Митькин. Высшая математика с основами математической статистики. «Высшая школа», М., 1965.

Бейли Н. Статистические методы в биологии. ИЛ, М., 1962.

Бернстайн А. Справочник статистических решений. «Статистика», М., 1968.

Большев Л. Н., Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. ВЦ АН СССР, М., 1968.

Боревич З. И. Определители и матрицы. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1970.

Борель Э. Вероятность и достоверность. «Наука», М., 1964.

Бородачев Н. А. Основные вопросы теории точности производства. Изд. АН СССР. М. — Л., 1950.

Браунли К. А. Статистические исследования в производстве. ИЛ, М., 1949.

Бусленко Н. П. Метод статистического моделирования. «Статистика», М., 1970.

Вальд А. Последовательный анализ. Физматгиз, М., 1960.

Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. ИЛ, М., 1960.

Венецкий И. Г. Вариационные ряды и их характеристики. «Статистика», М., 1970.

Венецкий И. Г., Г. С. Кильдишев. Основы теории вероятностей и математической статистики. «Статистика», М., 1968.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. «Наука», М., 1964.

Вентцель Е. С., Л. А. Овчаров. Теория вероятностей. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1969.

Вольф В. Г. Статистическая обработка опытных данных. «Колос», М., 1966.

Войтинский Е. Я., В. А. Прянишников. Методы и системы для статистического анализа электроэнцефалограмм. «Наука», М., 1968.

Герчук Я. П. Графические методы в статистике. «Статистика», М., 1968.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. «Высшая школа», М., 1970.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. ГИФ-МЛ, М., 1961.

Гнеденко Б. В., Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. Математические методы в теории надежности. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1965.

Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. «Мир», М., 1965.

Даймепд С. Мир вероятностей. «Статистика», М., 1970.

Джини К. Средние величины. «Статистика», М., 1970.

Долгушевский Ф. Г., В. С. Козлов, П. И. Полушин, Я. М. Эрлих. Общая теория статистики. «Статистика», М., 1967.

Дружинин Н. К. Выборочный метод и его применение в экономических исследованиях. «Статистика», М., 1970.

Езекиел М., К. А. Фокс. Методы анализа корреляций и регрессий. «Статистика», М., 1966.

Емельянов Г. В., В. П. Скитович. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. ЛГУ, Л., 1967.

Ефимов Н. В., Э. Р. Розендорн. Линейная алгебра и многомерная геометрия. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1970.

Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерения. «Наука», Л., 1967.

Каминский Л. С. Статистическая обработка лабораторных и клинических данных. «Медицина», Л., 1964.

Карасев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика. «Статистика», М., 1970.

Кемниц Ю. В. Теория ошибок измерений. «Недра», М., 1967.

Кендалл М. Дж., А. Стьюарт. Теория распределений. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1966.

Кокс Д., П. Льюис. Статистический анализ последовательностей событий. «Мир», М., 1969.

Колесников А. Ф. Основы математической обработки результатов измерений. Изд. Томск. ун-та, Томск, 1963.

Кордонский Х. Б. Приложения теории вероятностей в инженерном деле. ГИФ-МЛ, М. — Л., 1963.

Кузичев А. С. Диаграммы Венна. «Наука», М., 1968.

Кульбак С. Теория информации и статистики. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1967.

Левин Б. Р. (ред.) Справочник по надежности, т. I. «Мир», М., 1969.

Леман Э. Проверка статистических гипотез. «Наука», М., 1964.

Лукомский Я. И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. Госстатиздат, М., 1961.

Майстров Л. Е. Теория вероятностей (исторический очерк). «Наука», М., 1967.

Маринеску И., Ч. Мойнягу, Р. Никулеску, Н. Ранку, В. Урсяну. Основы математической статистики и ее применение. «Статистика», М., 1970.

Маслов П. П. Статистика (учебное пособие). «Мысль», М., 1964.

Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. Физматгиз, М., 1961.

Мостеллер Ф., Р. Рурке, Дж. Томас. Вероятность. «Мир», М., 1969.

Мюллер Д., К. Шусслер. Статистические методы в социологии (части I, II, III). Информационный бюллетень Советской социологической ассоциации, №№ 10, 11, 12, М., 1968.

Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1968.

Осипов Г. В. (ред.) Математические методы в современной буржуазной социологии. «Прогресс», М., 1966.

Осипов Г. В. (ред.). Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации. «Наука», М., 1968.

Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. ВЦ АН СССР, М., 1966.

Павловский З. Введение в математическую статистику. «Статистика», М., 1967.

Пагурова В. И. Критерий сравнения средних значений по двум нормальным выборкам. ВЦ АН СССР, М., 1968.

Пирятин В. Д. Обработка результатов экспериментальных измерений по способу наименьших квадратов. Изд. Харьковск. ун-та, Харьков, 1962.

Плохинский Н. А. Биометрия. Изд. МГУ, М., 1970.

Прохоров Ю. В., Ю. А. Розанов. Теория вероятностей. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1967.

Пугачев В. С. Теория случайных функций. ГИФ-МЛ, М., 1962.

Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1968.

Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1968.

Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1968.

Рейхман У. Дж. Применение статистики. «Статистика», М., 1969.

Розанов Ю. А. Лекции по теории вероятностей. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1968.

Розин Б. Б. (ред.) Статистические методы в экономическом анализе производства. «Наука», СО, Новосибирск, 1968.

Рокицкий П. Ф. Биологическая статистика. Минск, 1967.

Румшиский Л. З. Элементы теории вероятностей. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1970.

Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, Л., 1961.

Свешников А. А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1965.

Семендяев К. А. Эмпирические формулы. ГТТИ, М. — Л., 1933.

Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. «Наука», М., 1970.

Смирнов Н. В., И. В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1965.

Смирнов Н. В., Д. А. Белугин. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. «Недра», М., 1969.

Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1969.

Уилкс С. Математическая статистика. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1967.

Урбах В. Ю. Биометрические методы. «Наука», М., 1964.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1 и 2. «Мир», М., 1967.

Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. «Наукова думка», Киев, 1970.

Финни Д. Введение в теорию планирования экспериментов. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1970.

Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. Госстатиздат, М., 1958.

Хан Г., С. Шапиро. Статистические модели в инженерных задачах. «Мир», М., 1969.

Худсон Д. Статистика для физиков. «Мир», М., 1967.

Чернов Г., Л. Мозес. Элементарная теория статистических решений. «Советское радио», М., 1962.

Четвериков Н. С. (ред.) Применение методов корреляции в экономических исследованиях. «Наука», М., 1969.

Шеффе Г. Дисперсионный анализ. ГИФ-МЛ, М., 1963.
Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. «Мир», М., 1970.
Шубкин В. Н. (составит.) Количественные методы в социологии. «Наука», М., 1966.
Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. «Наука», ГРФ-МЛ, М., 1969.
Юл Дж. Э., М. Дж. Кендэл. Теория статистики. Госстатиздат, М., 1960.
Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. «Мир», М., 1965.
Ястремский Б. С. Некоторые вопросы математической статистики. Госстатиздат, М., 1961.
Clauss G., Ebner H. Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. Volk und Wissen Volkseigener Verlag. Berlin, 1967.
Fabian V. Statistische Methoden. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1968.
Ferguson G. A. Statistical Analysis in Psychology and Education. Sec. Ed. N. Y., 1966.
Fisz M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1962.
Guilford J. P. Fundamental Statistics in Psychology and Education. N. Y., 1956.
Jahn W., H. Vahle. Die Faktoranalyse. Berlin, 1970.
Lewis Don. Quantitative Methods in Psychology. New York—Toronto—London, 1960.
Harman H. Modern Factor Analysis. Univ. Chicago Press, 1960.
Horst P. Factor Analysis of Data Matrices. N. Y, 1965.
Rasch D. Elementare Einführung in die mathematische Statistik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1968.
Zschommler H. G. (gesamtred.). Biometrisches Wörterbuch. Bd. 1 und 2. VEB, Berlin, 1969.

Геннадий Владимирович Суходольский

Основы математической статистики
для психологов

Редактор *Н. Н. Васильева*
Техн. редактор *Е. Г. Учаева*
Корректоры *Р. Л. Савина*, *С. К. Школьникова*

М-09897. Сдано в набор 14/III 1972 г.
Подписано к печати 2/VI 1972 г.
Формат бумаги 60 × 90[1]/[16]. Бумага тип. № 3.
Уч.-изд. л. 26,71. Печ. л. 27. Тираж 7405 экз.
Заказ 1575. Цена 1 р. 03 к.

Издательство ЛГУ имени А. А. Жданова
199164. Ленинград, Университетская наб., 7/9.

Ленинградская типография № 6
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Московский пр., 91.

В 1972 г. ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛГУ ПРЕДПОЛАГАЕТ ВЫПУСТИТЬ СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ:

История преподавания и развития статистики в Петербургском — Ленинградском университете (1819—1971). 9 л., Цена 65 к. — Авт.: Баталина Т. С., Сиповская И. В., Суслов И. П., Юзбашева Е. М.

В монографии на основе исследования трудов профессоров Петербургского университета К. Ф. Германа, К. И. Арсеньева, Ю. Э. Янсона, А. А. Кауфмана и других опровергаются бытовавшие до недавнего времени представления о полном отсутствии в дореволюционной России оригинальной разработки статистической науки. Излагается история развития статистической теории в университете в советский период. История преподавания и развития статистики дается на общем историческом фоне и в связи со структурными преобразованиями университета, происшедшими в течение свыше 150 лет.

В значительной части монографии написана на основе архивных источников.

Работа рассчитана на экономистов-статистиков, историков науки и образования, а также всех интересующихся историей Ленинградского университета.

Вопросы инженерной психологии в автоматизированных системах управления. Сборник статей. Под ред. С. Н. Сафаряна. 10,5 л. Цена 76 к.

В сборник включены статьи по проблеме оптимального кодирования информации на средствах отображения. В ряде статей предлагаются способы и устройства набора и ввода информации, а также рассматривается деятельность человека-оператора, работающего в режиме слежения.

Издание рассчитано на широкий круг специалистов — инженеров, психологов, физиологов.

Экспериментальная и прикладная психология. Вып. 5. Сборник статей. Под ред. действ. члена АПН СССР Б. Г. Ананьева. 10 л. Цена 72 к.

В сборник включены статьи, посвященные актуальным проблемам общей, возрастной, дифференциальной и сравнительной психологии. В нем излагаются материалы теоретических исследований по различным проблемам (структуры и регулирующей функции перцептивных образов, информационного анализа психофизической проблемы, структуры индивидуально-типических особенностей человека) и анализируются экспериментальные данные исследований психических процессов разных уровней (перцептивных, мнемических, логических) в связи с возрастными, индивидуально-типическими и другими особенностями.

Сборник рассчитан на психологов, физиологов и студентов психологических отделений и факультетов университетов.

1 р. 03 к.


Г.В. СУХОДОЛЬСКИЙ • ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ПСИХОЛОГОВ •